Les exercices suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon de l'ensemble des exercices proposés lors des épreuves orales du concours 2007.

A. Exercices donnés en option scientifique

1° Densité de la somme de deux variables aléatoires réelles X et Y, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \, .$$

On note f_n une densité de S_n et F_n sa fonction de répartition.

2° a) Exprimer $f_{n+1}(x)$ à l'aide de la fonction F_n. Montrer ensuite que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} F_n(y)\,\mathrm{d}y \, .$$

b) En déduire un calcul explicite de F_2. La fonction F_2 est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

c) En déduire un calcul explicite de $F_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

3° Soit $t \in]0,1[$. On note

$$T_t = \mathrm{Inf}\left\{n \geqslant 1\, ,\ S_n > t\right\} .$$

Déterminer la loi de T_t. Calculer l'espérance de T_t.

On pose, pour a réel positif et x réel,

$$\varphi_a(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \, .$$

1° Rappeler le théorème des accroissements finis et en déduire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)\big| \leqslant k\,|x-y| \, .$$

2° On se donne $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et on considère la suite de premier terme u_0 et définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi_0(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

a) Déduire de la question précédente que $\forall\, n \in \mathbb{N}\, ,\ |u_{n+1}| \leqslant k\,|u_n|$, puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) Retrouver la convergence de cette suite en examinant ses propriétés.

3° La suite définie par $v_0 = u_0$ et par la relation de récurrence $v_{n+1} = \varphi_1(v_n)$ pour $n \geqslant 0$ converge-t-elle ?

4° Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire U_0 définie sur Ω, suivant la loi uniforme sur le segment $[0,\alpha]$, avec $\alpha > 0$. On considère la relation $U_{n+1} = \varphi_0(U_n)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une suite de variables aléatoires à densité.

b) Étudier la convergence en probabilité de cette suite de variables aléatoires.

5° On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire T_n suit une loi uniforme sur $[0,n]$.

a) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \leqslant C\,\mathrm{e}^{-x} \, .$$

b) En déduire que $\big(\varphi_0(T_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une constante à déterminer.

Donner la définition d'une loi hypergéométrique et la valeur de son espérance.

1° Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On suppose que :

$$\Big[\ \forall\, p \in [\![1,n]\!]\, , \quad \mathbb{E}(X^p) = \mathbb{E}(Y^p)\Big] \qquad (1)$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $a_k = \mathbb{P}\big([X=k]\big)$, $b_k = \mathbb{P}\big([Y=k]\big)$ et $c_k = a_k - b_k$.

a) Montrer que les conditions (1) se traduisent par l'existence d'une matrice carrée A de taille n telle que

$$A\,C = 0\,, \quad \text{où l'on a posé} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On note $L_1, \ldots, L_n$ les vecteurs-ligne de A.

b) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (dépendant des λ_i) tel que :

$$\lambda_1\, L_1 + \cdots + \lambda_n\, L_n = 0 \Leftrightarrow P(1) = \cdots = P(n) = 0\,.$$

c) En déduire que A est inversible puis que X et Y ont même loi.

2° On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires avec a et b entiers strictement positifs vérifiant $a + b \geqslant n \geqslant 3$ (n entier). On effectue n tirages avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Puis on effectue n tirages sans remise et on note Y le nombre de boules blanches obtenues.

Donner la plus petite valeur de k telle que $\mathbb{E}\big(\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^k\big) \neq \mathbb{E}\big(\big[Y - \mathbb{E}(Y)\big]^k\big)$. Indication : On pourra considérer $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$.

Pour une variable aléatoire à densité, énoncer les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition, respectivement d'une densité.

Les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose

$$X = -\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right).$$

1° Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

2° En déduire une densité de la variable X.

3° Calculer $\mathbb{E}(X)$ en justifiant son existence.

4° Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$, indépendante de U et telle que

$$\mathbb{P}\big([V = 1]\big) = \frac{1}{2}\,.$$

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire

$$Y = V\,X + (1 - V)\,X^2\,.$$

5° Écrire un algorithme de simulation de la variable Y.

6° On pose $Z = \mathbb{I}_{U > 1/2}.X$. Déterminer la fonction de répartition de la variable Z et tracer la courbe représentative de cette fonction.

7° Z est-elle une variable aléatoire à densité ?

8° Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

9° Écrire un algorithme de simulation de Z.

Soit E un espace vectoriel réel.

a) Si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs de E, donner la définition de : « la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre. » Que peut-on dire de p si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre et que E est de dimension finie ?

b) Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que

$$f^p = 0 \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0$$

(pour $k \in \mathbb{N}^*$, f^k désigne $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f apparaît k fois, et $f^0 = \mathrm{Id}_E$).
Montrer que si $x \in E$ est tel que $f^{p-1}(x)$ n'est pas le vecteur nul, alors la famille

$$\Big(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\Big)$$

est libre.

1° a) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$, alors $A^3 = 0$.

b) Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ?$$

2° a) Déterminer les triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^3$ tels que, si on pose, pour t réel,

$$\varphi(t) = \mathrm{Id}_3 + tA + t^2 B + t^3 C$$

alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \qquad \big(\varphi(t)\big)^2 = \varphi(2t)\,.$$

b) Pour un tel triplet, calculer $\varphi(t) \times \varphi(t')$ où $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

On note E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur le segment $[0,1]$ est nulle.
Si f appartient à E, on note $\|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\mathrm{Max}}\, |f(t)|\,.$

1° a) Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle.

b) Soit f une fonction réelle d'une variable réelle dérivable sur un intervalle I. Justifier que f est croissante sur I.

2° Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$\varphi(x) = \int_0^1 |x+t|\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Expliciter $\varphi(x)$ et montrer que φ possède un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

b) Quel est le plus grand entier naturel k pour lequel φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$?

3° Montrer que si f appartient à E, f admet une unique primitive appartenant à E, qu'on notera $P(f)$, et exprimer $P(f)(x)$, pour $x \in [0,1]$, en fonction de

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et de} \quad \int_0^1 t\,f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

4° Si $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on note f_x l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout t appartenant à $[0,1]$,

$$f_x(t) = \begin{cases} f(t+x) & \text{si} \quad t \in [0, 1-x[\\ f(t-1+x) & \text{si} \quad t \in [1-x, 1]\,. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t$ et comparer $\displaystyle\int_0^1 t f_x(t)\,\mathrm{d}t$ à $P(f)(x)$.

5° En déduire que si f appartient à E, pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$\big|P(f)(x)\big| \leqslant \frac{1}{4}\,\|f\|_\infty\,.$$

Rappeler les définitions d'un estimateur, d'un estimateur sans biais, et d'un estimateur convergent.

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, discrète ou à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, possédant des moments de tout ordre, c'est-à-dire que, pour tout q de $\mathbb{N}^*$, $m_q = \mathbb{E}(X^q)$ existe.
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon indépendant, identiquement distribué $\big(X_1, X_2, \ldots, X_n\big)$ de la loi de X.
Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Z_q = X^q \quad \text{et} \quad \overline{Z}_{n,q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^q\,.$$

1° Montrer que la suite de variables aléatoires

$$U_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{Z}_{n,q} - m_q}{\sqrt{m_{2q} - m_q^2}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

On suppose dorénavant que $q = 2$ et que X suit une loi normale centrée de variance σ^2 (avec $\sigma > 0$).

2° a) Calculer $\mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}\big(Z_2^2\big)$ en fonction de σ^2.

b) En déduire que la suite de variables aléatoires

$$V_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\overline{Z}_{n,2} - \sigma^2}{\sigma^2}$$

converge en loi vers une variable aléatoire T qui suit la loi normale centrée réduite.

3° On suppose que σ^2 est inconnu.
Soit u_α le réel tel que :

$$\mathbb{P}\big([T \leqslant u_\alpha]\big) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,,$$

où la probabilité α est donnée dans $]0, 1[$.
Déterminer, pour n assez grand, un intervalle de confiance pour le paramètre σ^2 au risque α donné.

Donner les formules des développements limités d'ordre 1 et 2 d'une fonction g de n variables au voisinage d'un point en rappelant les hypothèses vérifiées par g dans chaque cas.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique usuel $\langle\ ,\ \rangle$.
On note $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire et on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X, Y) = {}^tXAY$ soit un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^n)$.

1° Vérifier que A est symétrique. Montrer que ses valeurs propres sont strictement positives.

Dans la suite de l'exercice, on considère un vecteur B de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n\,,\quad f(X) = \frac{1}{2}\,{}^tXAX - {}^tBX\,.$$

2° a) On note μ la plus petite des valeurs propres de la matrice A.
Montrer que $\forall\, X \in \mathbb{R}^n,\quad {}^tXAX \geqslant \mu\|X\|^2$.

b) f est-elle majorée ?

3° *On admet* que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$|f(X)| \leqslant \frac{\|B\|^2}{2\mu}$$

est un fermé.
Montrer que f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$.

4° Montrer que la fonction f admet un unique point critique, donné par $X_0 = A^{-1}B$.

5° Vérifier que ce point critique correspond bien à un minimum.

6° Application : On considère

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le point où f atteint son minimum.

Rappeler la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme, et le lien avec les valeurs propres de cet endomorphisme.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vérifie :

$$(A - I)\,(A - 2I)^2 = 0\,.$$

1° Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.

On suppose désormais que 1 *est valeur propre de* A *et on note* E_1 *le sous-espace propre associé.*

2° Montrer que si $\dim(E_1) \geqslant 2$, alors A est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas selon que 2 est ou non valeur propre de A).

3° On suppose que A n'est pas diagonalisable et on pose $G = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$.

a) Quelle est la dimension de G ?

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Calculer explicitement M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n.

Rappeler la définition et les propriétés d'une matrice symétrique réelle.

Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1° Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ formant une base orthonormée.
Calculer ${}^tXAY$ et montrer que $\left|{}^tXAY\right| \leqslant 1$.
Quelles sont les valeurs propres de A ?

2° Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \geqslant 2$, de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et D la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
On note

$$E = \Big\{ (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad {}^tXX = {}^tYY = 1 \quad \text{et} \quad {}^tXY = 0 \Big\}.$$

On cherche à montrer que

$$\forall\,(X,Y) \in E, \quad \left|{}^tXAY\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\lambda_n - \lambda_1\Big) \qquad (1)$$

a) Montrer que pour prouver (1), il suffit d'établir

$$\forall\,(X',Y') \in E, \quad \left|{}^tX'DY'\right| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\lambda_n - \lambda_1\Big) \qquad (2)$$

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left|{}^tX'DY'\right| \leqslant \frac{1}{2}(\lambda_n - \lambda_1)$$

et conclure.
On pourra introduire le milieu μ du segment $[\lambda_1, \lambda_n]$.

c) Trouver un couple $(X,Y) \in E$ tel que l'inégalité (1) soit en fait une égalité.

Dans cette question, on admet (provisoirement) que, quelle que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs, décroissante, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} 2^k\, a_{2^k}$ converge.

Soit α un réel positif ou nul.
Déterminer, en fonction de α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$.

1° Montrer que, quelle que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs, décroissante, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} 2^k\, a_{2^k}$ converge.
On pourra poser

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k\, a_{2^k}$$

et chercher à encadrer T_n à l'aide de termes convenables de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit pour n entier naturel la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^5 + n\,x - 1.$$

1° Montrer que pour tout n il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

2° Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent simple de u_n.

3° On pose $u_n = \frac{1}{n} - a_n$. Vérifier que $na_n = u_n^5$ et en déduire un équivalent de a_n.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles et admettant une densité f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose de plus que X admet un moment d'ordre deux.

1° Étudier le comportement de $x^2\,\mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

2° Établir un relation entre

$$\mathbb{E}(X^2) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x\,\mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

3° Prouver que :

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 2\int_0^{+\infty} x\,\mathbb{P}\big([X \geqslant x]\big)\mathrm{d}x\,.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1° Quelle(s) valeur(s) de j maximise(nt) $\mathbb{P}\big([X = j]\big)$?

2° Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, quelle(s) valeur(s) de λ maximise(nt) $\mathbb{P}\big([X = j]\big)$?

3° Montrer que si $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\big(|X - \lambda|\big) = \frac{2\lambda^\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}\,.$$

On suppose que $P(X) = X\,(X + 2)$ est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle. Montrer que -2 est est valeur propre de A et que A est diagonalisable.
Soit f et g deux endomorphismes d'un espace euclidien E, qui commutent. On suppose que les matrices S et T de f et g dans une base orthonormale sont respectivement symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire vérifient :

$${}^tS = S \quad \text{et} \quad {}^tT = -T\,.$$

Montrer que, pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) \perp g(x) \quad \text{et} \quad \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|\,.$$

Une matrice carrée N est dite nilpotente si et seulement s'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^q = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente différente de la matrice nulle.

1° Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$.

2° Justifier que la matrice $A = I - N$ est inversible et déterminer son inverse.

3° Montrer que $I - A^{-1}$ est nilpotente.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

1° Montrer que A est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2° Vérifier que

$$\mathcal{F} = \Big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,,\ AM + MA = 0\Big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

1° La matrice A est-elle diagonalisable ?

2° Déterminer toutes les droites D de $\mathbb{R}^3$ stables par f, c'est-à-dire telles que $f(D) \subset D$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes une loi normale centrée réduite.
Soit θ un nombre réel. On pose

$$Y_0 = X_0 \quad \text{et pour } n \geqslant 1\,,\ Y_n = \theta\, Y_{n-1} + X_n\,.$$

1° Donner la loi de Y_n.

2° Calculer $\mathbf{Cov}(Y_n\,, Y_{n-k})$ pour $n > k > 0$.

B. Exercices donnés en option économique

Question de Cours: Définition d'un estimateur ; définitions du biais et du risque quadratique d'un estimateur.

On considère n $(n \geqslant 2)$ variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de densité

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad T = \mathrm{Max}(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

1° Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

2° Calculer $\mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big)$. En déduire une densité de T puis $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3° On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.

a) Montrer qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de θ. Calculer $\mathbb{V}(S')$ et $\mathbb{V}(T')$.

b) Entre les deux estimateurs de θ, S' et T', lequel doit-on préférer ?

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note pour tout endomorphisme u de E et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $u^0 = Id_E$ et

$$u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}}$$

On commence par considérer un endomorphisme non nul de E tel que pour tout $x \in E$, il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{r(x)}(x) = 0$.

1° Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice réelle (en toute généralité).

2° Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que u^r soit l'application nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

3° Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u ; est-il diagonalisable ?

4° On pose :

$$v = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^k}{k!}\,.$$

Montrer que v est un isomorphisme de E sur E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u.

5° Donner une relation simple entre $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v - Id)$.

6° Déterminer les valeurs propres de v.

On considère un type de composants électroniques, dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{t^2} \text{ si t} \geq 10 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1° Rappeler les qualités d'une densité de probabilité ; en déduire la valeur du réel c.

2° Déterminer les réels m pour lesquels $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$.

3° Quelle est la probabilité que, sur un lot de 5 composants du type précédent, 3 au moins fonctionnent durant au moins 15 heures ? Deux machines A, B sont équipées de composants du type précédent. Plus précisément,
$\star$ A contient deux composants et cesse de fonctionner dès que l'un de ces composants est défectueux ;
$\star$ B contient également deux composants mais un seul de ces composants suffit à la faire fonctionner
On note T_A, T_B les durées de fonctionnement de ces machines.

4° Déterminer une densité pour chacune des variables T_A et T_B.

5° Pour chacune des variables T_A, T_B indiquer si elle possède une espérance, et le cas échéant, la calculer.

Question de cours. Rappeler la formule des probabilités totales.

On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité p_2. On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce ; plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$.
1° Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer ?

2° Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au n-ième lancer ?

3° Calculer

$$L = \lim_{n\to\infty} r_n.$$

4° Dans cette question on suppose $p_1 = 1/3$ et $p_2 = 1/6$. Écrire en langage Pascal l'expression d'une fonction permettant de calculer la valeur d'un rang n_0 à partir duquel :

$$|r_n - L| \leq 10^{-6}.$$

Soit n et N des entiers non nuls.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N tirages avec remise dans cette urne.

1° Soit F_i la variable aléatoire égale au nombre de fois où le jeton i a été tiré.
Déterminer la loi de F_i.

On pose :

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i\ .$$

Déterminer la loi de F, son espérance et sa variance.
Les variables aléatoires F_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

2° Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le numéro i n'a pas été tiré et égale à 1 s'il a été tiré au moins une fois. Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.

Pour $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer la probabiité

$$\mathbb{P}_{[X_i=0]}(X_j = 0)\ .$$

Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

Soit $\alpha > 0$, $x_0 > 0$ et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \quad \text{si} \quad x \geqslant x_0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

1° a) Donner la définition d'une variable aléatoire à densité et vérifier que la fonction f est bien la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.
Déterminer la fonction de répartition de X et donner une allure de son graphe.

On dit que X suit la loi de Pareto de paramètres x_0 et α.

b) Pour quelles valeurs de α la variable X admet-elle une espérance et une variance ? Calculer l'espérance de X lorsqu'elle existe.

c) On suppose $\alpha > 1$ et on pose, pour tout $x > x_0$:

$$M_X(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t}\quad .$$

Calculer $M_X(x)$.

2° On se propose d'établir une réciproque de la propriété précédente. Soit $x_0 > 0$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[x_0, +\infty[$ de densité h continue, à valeurs strictement positives, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ vérifiant :

$$\forall x > x_0\,, \quad M_Y(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t\, h(t)\, \mathrm{d}t}{\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t} = k\, x\,.$$

a) On pose, pour tout $x > x_0$,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Montrer que

$$G(x) = \frac{1-k}{k}\, x\, G'(x)\,.$$

b) En calculant, pour tout $x > x_0$, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^{\frac{k}{k-1}}\, G(x)$, déterminer la valeur de $G(x)$, puis la fonction de répartition de Y.
Quelle loi retrouve-t-on ?

Soit X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$ indépendantes.
Calculer $\mathbb{P}\big([X = Y]\big)$.

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donné par

$$f\,(B,\, N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1° Déterminer les extrémums de la fonction f ; donner leur nature.

2° Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B + 2N = 23$ déterminer l'optimum de rendement.

Donner s'il en existe un exemple de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que deux quelconques d'entre eux soient linéairement indépendants. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont ces trois vecteurs soient vecteurs propres ?

1° Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.

a) $\mathcal{F}$ peut-elle être une famille libre ?

b) On suppose que toute sous-famille de n vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre. Démontrer que les $n+1$ valeurs propres associées respectivement aux $n+1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ sont égales.
Que peut-on en conclure pour f ?

Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ sont notées A et B. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2° v peut-il être bijectif ? Déterminer $\operatorname{Im} v$.

3° Déterminer $\operatorname{Ker} u$.

4° Donner la forme des matrices A et B.

C. Exercices donnés en option technologique

Rappeler la définition et les propriétés de la loi de Poisson.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
X suit une loi de Poisson de paramètre 2 et Y suit une loi de Poisson de paramètre 3.

1° On pose $Z = X + Y$.

a) Déterminer $Z(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

c) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'événement $[Z = n]$ peut se décomposer comme suit :

$$[Z = n] = \Big([X = 0] \cap [Y = n]\Big) \cup \Big([X = 1] \cap [Y = n - 1]\Big) \cup \cdots \cup \Big([X = n] \cap [Y = 0]\Big).$$

d) En déduire que :

$$\mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \frac{\mathrm{e}^{-5}\, 5^n}{n!}.$$

2° Soit k un entier donné de $\mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel n tel que $n \leqslant k$, calculer $\mathbb{P}_{[Z=k]}\left([X = n]\right)$, et reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $[Z = k]$.

3° On pose : $U = X - Y$.

a) Trouver l'espérance $\mathbb{E}(U)$ et la variance $\mathbb{V}(U)$.

b) Déterminer $U(\Omega)$. La variable U suit-elle une loi de Poisson ?

U désigne une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1° a) Donner une densité de U.

b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire U.

c) Exprimer, en fonction du réel x, la probabilité $\mathbb{P}(U > x)$.

2° Une banque possède deux guichets. On estime que le temps de passage d'un client à un guichet suit la même loi que la variable aléatoire U.
Trois clients A,B et C arrivent en même temps. A et B,pressés, s'adressent chacun à un guichet tandis que C, attend que A ou B libére un guichet.
On désigne par :
U_1 et U_2 les temps de passage respectifs de chacun des deux clients A et B,
et V le temps d'attente du client C. On supposera que les variables U_1 et U_2 sont indépendantes.

a) Justifier que : pour tout x réels,

$$[V > x] = [U_1 > x] \cap [U_2 > x].$$

b) En déduire, pour tout x réel, $\mathbb{P}\big([V > x]\big)$ en fonction de $\mathbb{P}\big([U > x]\big)$.

c) Etablir que la variable V admet pour fonction de répartition la fonction G définie par :

$$\begin{cases} G(x) = & 0 \qquad \text{si } x < 0 \\ G(x) = & 2x - x^2 \qquad \text{si } x \in [0, 1] \\ G(x) = & 1 \qquad \text{si } x > 1 \end{cases}$$

d) En déduire une densité de probabilité g de la variable V.

e) Montrer que V admet une espérance et une variance qu'on calculera.

Dans tout cet exercice, on considère deux nombre réels S et x tels que : $S > 0$ et $x \geq 0$.

1° La somme S est placée deux années consécutives au taux d'intérêt x.
Le taux x désigne un nombre tel que $0 < x < 1$. Ainsi, si le taux est de 4%, on a $x = 0,04$.
De quelle somme dispose-t-on à l'issue des deux années de placements ?

2° La somme S est placée la première année au taux $2x$ et la seconde au taux y.
De quelle somme S_2 dispose-t-on à l'issue de deux années de placement ?

3° Montrer que l'égalité de ces deux placements c'est-à-dire l'égalité $S_1 = S_2$ équivaut à une égalité de la forme $y = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction de dans $\mathbb{R}_+$, que l'on explicitera.

4° Donner le tableau de variations de f et l'allure de la courbe représentative.

Dans l'urne U_1, la probabilité de tirer une boule rouge est égale à p, et dans l'urne U_2, elle est de $\frac{p}{3}$.
On tire au sort, avec équiprobabilité, l'une des deux urnes U_1 et U_2, et on choisit au hasard une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité pour que la boule rouge tirée provienne de l'urne U_1 ?

D. Exercices donnés en option littéraire B/L

1° Définition des valeurs propres, des vecteurs propres et de la diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On rappelle qu'on note $u^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,

$$u^r = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{r \text{ termes}} .$$

2° On considère un endomorphisme non nul $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $r(x) \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $u^{r(x)}(x) = 0$.

a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que u^r soit l'application nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u. Est-il diagonalisable ?

3° u étant défini dans la question précédente, on pose :

$$v = \sum_{k=0}^{r-1} u^k .$$

a) Montrer que v est un isomorphisme de E sur E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u.

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme v. Est-il diagonalisable ?

4° Dans cette question, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant n$, et l'application $U : E \to \mathbb{R}[X]$ qui, à tout polynôme P associe sa dérivée P'.

a) Vérifier que U satisfait les hypothèses (de u) de la question **2°**.

b) En déduire que l'application $\varphi : E \to E$ définie par

$$\forall\, P \in E\,, \quad \varphi(P) = P + P'$$

est bijective et exprimer son inverse en fonction de U.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$q_n = \prod_{k=0}^{n} (1-u_k) = (1-u_0)\,(1-u_1)\ldots(1-u_n)$$

et on dit que ce produit est ***convergent*** ssi la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L > 0$.

On note alors cette limite (appelée produit infini) $L = \displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} (1-u_k)$.

c) Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la limite des produits suivants :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \quad \text{et} \quad q_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) .$$

d) Montrer que si le produit $q_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1-u_k)$ converge, alors $\lim\limits_{k\,\infty} u_k = 0$.

e) En déduire que le produit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi la série de terme général u_k converge.

1° Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On appelle ***taux de panne*** associé la suite réelle définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad x_n = \mathbb{P}_{[X\geqslant n]}\big([X=n]\big) .$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big) = (1-x_n)\,\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$$

et en déduire l'expression de $p_n = \mathbb{P}\big([X=n]\big)$ en fonction des x_k.

b) Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant pour $n \geqslant 1$.

c) Montrer qu'une suite réelle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne ssi $0 \leqslant x_k < 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général x_k diverge. [RS]

Déterminer un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de

$$F(x) = \int_0^x |\sin t| \, \mathrm{d}t \, .$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = a\, \mathrm{e}^{x - a\, \mathrm{e}^x} \, .$$

1° À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité ?

2° Si X est une variable aléatoire réelle admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$?