Rapport sur les épreuves de mathématiques des concours 2009 des classes préparatoires économiques et commerciales

APHEC

juin 2009

Ce document est public, et disponible sur le site de l'APHEC (`http://aphec.it-sudparis.eu`), rubrique "Observatoire des concours / Rapports annuels sur les concours"

Introduction

Le rapport annuel de l'APHEC sur les épreuves de mathématiques porte comme d'habitude sur le contenu mathématique des épreuves des concours. Les rapports des années précédentes semblent avoir été pris en compte, puisque les sujets, à quelques exceptions près, semblent bien adaptés aux publics visés.
Cependant, l'APHEC ne peut pas juger l'adéquation du barème et des exigences de correction avec la difficulté du sujet et la virtuosité mathématique des candidats, et donc la notation finale.
Les sujets sont souvent très longs, ce qui est tout à fait normal, sans être trop longs non plus. Le choix du barème qui permet, dans une certaine mesure, de compenser certains défauts du sujet, doit tenir compte de sa longueur, mais il ne doit pas tomber dans certains travers. Les grand principes qui doivent guider l'élaboration du barème sont entre autres :

1. **Les questions doivent être valorisées en fonction de leur difficulté intrinsèque**. Aucune question ne doit être sous-notée au prétexte que (presque) personne ne l' a abordées, laissant place à ce mauvais réflexe consistant à sur-noter les questions faciles pour *mieux départager les candidats*.

   Cela tient à un respect fondamental du candidat : les candidats composent sans avoir connaissance du barème, et certains peuvent avoir passé du temps sur une question difficile ; cela ne doit pas être pénalisant pour eux, et donc être jugé à sa juste valeur, ceci même si peu de copies sont concernées : ils auront certainement fait preuve de qualités mathématiques autres.

   Le barème doit rendre compte de toutes les qualités mathématiques de tous les candidats, et non de leur instinct à deviner les questions "qui valent le coup".
2. **Le barème doit également tenir compte des exigences de rédaction communément admises**. Bien sûr, plus la question comporte d'indications et d'éléments de réponses, plus la rédaction devient l'élément discriminant d'un candidat à l'autre. Inversement, dans une question moins guidée, le savoir-faire mathématique sera plus à valoriser.
3. Enfin, **les consignes de correction doivent être suffisamment détaillées** et discutées pour que **la correction soit la plus objective possible d'un correcteur à l'autre**. La réunion de tous les correcteurs doit être l'occasion de préciser au mieux chacune des erreurs ou omissions possibles, ainsi que les sanctions à leur infliger.

Dans tous les cas, le barème ne sert pas à noter directement les copies, mais à en faire une évaluation chiffrée ; très souvent la note calculée à partir de l'évaluation chiffrée ne résulte pas seulement d'une simple division. En effet, il se peut que les évaluations souffrent de quelques défauts de répartition, et que la note obtenue ne soit pas calculée de la même manière pour les bonnes ou moins bonnes copies par exemple afin d'utiliser au mieux l'échelle des notes de 0 à 20.
Ainsi, c'est le triplet fondamental sujet-barème-notation qui sert au *pilotage* des épreuves, et les meilleures épreuves sont celles pour lesquelles le passage de l'un à l'autre des leviers se fait le plus naturellement possible, chaque étape ayant été soigneusement vérifiée. Sans cela, les aléas du concours, à trop les laisser s'exprimer, pourraient engendrer des injustices facheuses.

Table des matières

1 Les épreuves de mathématiques 2009

1.1 Option Economique

Date et appellation	**Concepteur**	**(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve**
Lundi 27 avril 2009 EML voie E	EML	(4) EM Lyon (6) CERAM Sophia-Antipolis (3) ESC Bretagne Brest (4) ESC Clermont (3) ESC Dijon (5) ESC Lille (4) ESC Pau (3) ESC Rennes (4) Ecole Magt Strasbourg (4) ISC (9) ESM de Saint-Cyr
Mardi 28 avril 2009 HEC voie E	HEC	(4) HEC (4) ESCP-EAP
Lundi 4 mai 2009 EDHEC voie E	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (3) ESC Amiens (9) ESC Grenoble (GEM) (3) ESC Montpellier (7) ESC Toulouse (6) TELECOM (ex INT Mangt) (5) INSEEC (Paris-Bordeaux) (3) ENAss (option Mathématiques) (5) ESLSCA (4) ISG
Mardi 5 mai 2009 ESSEC voie E math 2	ESSEC	(4) HEC (4) ESSEC (3) ESCP-EAP (2) EM Lyon
Mercredi 6 mai 2009 ESSEC voie E math 1	ESSEC	(4) ESSEC
Mardi 12 mai 2009 ESC voie E	ESC	(5) ESC Chambéry (4) ESC La Rochelle (5) ESC Saint-Etienne (5) ESC Troyes (4) Ecole de Management de NORMANDIE (2) ISCID
Jeudi 14 mai 2009 Ecricome voie E	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (4) ICN NANCY (5) Sup de Co REIMS (5) ESC ROUEN (5) ESC TOURS-POITIERS

1.2 Option Scientifique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve
Lundi 27 avril 2009 EML voie S	EM Lyon	(6) EM Lyon (6) CERAM Sophia-Antipolis (3) ESC Bretagne Brest (5) ESC Clermont (5) ESC Dijon (5) ESC Lille (3) ESC Montpellier (4) ESC Pau (5) ESC Rennes (5) Ecole Magt Strasbourg (6) ISC
Mardi 28 avril 2009 HEC voie S	HEC	(6) HEC (6) ESCP-EAP (25) ENSAE
Lundi 4 mai 2009 EDHEC voie S	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (4) ESC Amiens (8) ESC Grenoble (GEM) (7) ESC Toulouse (7) TELECOM (ex INT Mangt) (5) INSEEC (Paris-Bordeaux) (3) ENAss (option Mathématiques) (6) ESLSCA (6) INSEEC (5) ISG
Mardi 5 mai 2009 CCIP voie S	CCIP	(5) HEC (5) ESSEC (4) ESCP-EAP (3) EM Lyon
Mercredi 6 mai 2009 ESSEC voie S	ESSEC	(6) ESSEC
Mardi 12 mai 2009 ESC voie S	ESC	(5) ESC Chambéry (4) ESC La Rochelle (5) ESC Saint-Etienne (5) ESC Troyes (7) Ecole de Management de NORMANDIE (2) ISCID
Jeudi 14 mai 2009 Ecricome voie S	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (5) EUROMED MARSEILLE (5) ICN NANCY (5) Sup de Co REIMS (7) ESC ROUEN (5) ESC TOURS-POITIERS

1.3 Option Technologique

Date et appellation	**Concepteur**	**(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve**
Mardi 5 mai 2009 ESCP-EAP voie T	ESCP-EAP	(5) ESCP-EAP (5) HEC (5) ESSEC (3) EM Lyon (5) EDHEC (3) AUDENCIA Nantes (4) CERAM Sophia-Antipolis (10) ESC Grenoble (GEM (4) ESC Lille (3) ESC Rennes (5) ESC Toulouse (5) TELECOM(ex INT Mangt)
Mardi 12 mai 2009 ESC voie T	ESC	(3) ESC Amiens (4) ESC Bretagne Brest (4) ESC Chambéry (3) ESC La Rochelle (4) ESC Saint-Etienne (4) ESC Troyes (2) ESC Clermont (2) ESC Dijon (4) Ecole de Management de NORMANDIE (7) ESC Montpellier (4) ESC Pau (3) Ecole Magt Strasbourg (4) INSEEC (Paris-Bordeaux) (2) ISC (4) ESLSCA (2) ISCID (4) ISG
Jeudi 14 mai 2009 Ecricome voie T	Ecricome	(4) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (3) ICN NANCY (4) Sup de Co REIMS (4) ESC ROUEN (4) ESC TOURS-POITIERS

2 Option Economique

2.1 ECRICOME 2009 voie E

Descriptif

L'épreuve se compose de trois exercices.

Exercice 1 Sous-espace vectoriel de l'espace des matrices carrées d'ordre trois. Diagonalisation. Calcul d'une puissance d'exposant n. Reprise dans le cas d'une trigonalisation.

Exercice 2 Étude d'une fonction numérique simple. Nombre de zéros via le théorème des valeurs intermédiaires. Application à la détermination d'un extremum d'une fonction de deux variables par les dérivées premières et secondes.

Exercice 3 Loi normale, loi binomiale. Probabilités conditionnelles débouchant sur une suite arithméticogéométrique. Loi de Poisson. Variable à densité.

Commentaire

Sujet plutôt classique d'un niveau relativement simple qui semble bien adapté aux objectifs de recrutement. Saluons la présence d'une question d'informatique (une dichotomie), même si elle occupe une place encore trop marginale dans cette épreuve. L'exercice de probabilités se prêtait pourtant à des simulations intéressantes. Quelques grandes notions sont également absentes (estimation) ou quasi-absentes (calcul intégral) mais sans doute ne peut-on pas tout aborder en quatre heures.

> En résumé, une assez bonne épreuve qui permettra de bien classer les candidats auxquels elle est destinée.

2.2 EML 2009 voie E

Exercice I : Étude d'une fonction, d'une suite et d'une intégrale fonction des bornes, liées à cette fonction.
Cet exercice en 3 parties classiques balaye assez largement le programme d'analyse, et propose l'écriture d'un programme permettant de bien valoriser l'apprentissage de PASCAL. Les résultats critiques sont fournis. La question 2a demande de mener les calculs avec finesse.

Exercice II : diagonalisation, équation matricielle et polynôme.
Evitant les calculs lourds, (valeurs propres données et matrice de passage triangulaire, simple à inverser), cet exercice permet de valoriser la compréhension du cours, et dans la troisième partie, originale, l'esprit de synthèse.

Exercice III : tirages avec remise jusqu'à Noir puis jusqu'au changement de couleur.
À partir de la loi géométrique, un travail de compréhension des événements et demandé. Les résultats nécessaires à la poursuite des calculs, ou ceux plus subtils à trouver, sont fournis. Les calculs eux mêmes sont de difficultés raisonnables.

> Le sujet comporte peu de questions portant sur le programme de seconde année, mais il est bien conçu, mêlant méthodes classiques et questions plus fines. Il devrait permettre
> – de bien étaler les notes pour les écoles utilisant cette épreuve
> – aux élèves sérieux, de valoriser leur travail
> – aux meilleurs candidats de mettre en lumière leurs qualités mathématiques.

2.3 HEC 2009 voie E

Le sujet comporte un exercice et un problème.

Exercice : L'exercice étudie la réduction des matrices 2×2 en faisant redémontrer les propriétés de la trace et du déterminant. Il est tout à fait adapté au niveau de la section, mais il semble se confirmer qu'une préparation efficace à HEC passe par de petits dépassements de programme.

Problème : Le problème présente diverses applications de la suite de Fibonacci en algèbre linéaire (puissance de matrice), algorithmique (théorème de Zeckendorf) et probabilité (obtenir deux piles consécutifs). On y trouve des questions très classiques et des questions originales, et les réponses peuvent être immédiates comme très complexes, aucune n'étant tout à fait bloquante pour la suite.

> Un ensemble varié et adapté, qui devrait permettre de classer correctement les candidats de cette voie. On pourra regretter quand même que dans un sujet aussi long, le programme de seconde année soit sous-représenté (ni intégrale, ni variable à densité, ni estimation)

2.4 EDHEC 2009 voie E

Exercice 1 : Étude d'une fonction, puis d'une suite implicite.
Exercice classique, qui étudie la régularité d'une fonction au moyen d'un développement limité, propose la construction du tableau de variation en étudiant une fonction auxiliaire. L'étude de la suite implicite utilise la réciproque de f. Les raisonnements requis nécessitent d'être au point au niveau calculatoire.

Exercice 2 : Exercice sur les variables aléatoires discrètes faisant intervenir un programme informatique classique.

Exercice 3 : Variable aléatoire à densité.
La première question est classique. La suite de l'énoncé, plus théorique, réussira aux candidats maîtrisant de manière très satisfaisante le chapitre sur les variables à densité. Cette partie nécessite un niveau de rigueur au-dessus de la moyenne.

Problème : Algèbre linéaire : résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants dans $\mathbb{R}_2[X]$, puis dans $C^\infty(\mathbb{R})$.
La première partie est classique, la deuxième, plus originale et théorique, reste accessible.

> Sujet original et fin, qui requiert des candidats réflexion et adaptation. Plusieurs parties sont classiques et accessibles. Le reste du sujet requiert des capacités de réflexion plus poussées : il a certainement désarçonné les étudiants de niveau moyen et distingué les meilleurs.

2.5 ESSEC 2009 voie E

Cette année, l'épreuve ESSEC math I était constituée de trois problèmes de probabilité présentés comme indépendants, mais qui reposaient sur une même thématique de stratégie d'arrêt optimal.

Problème 1 Le premier problème, assez court, permet de trouver la meilleure stratégie lorsque l'on parie sur le dernier succès au cours de la répétition indépendante d'une même épreuve à deux issues. Ce problème se termine par un exemple "concret" d'application de la stratégie mise en oeuvre. Les questions font appel au cours de première année sur les lois usuelles et sont assez simples.

Problème 2 Le second problème prolonge assez naturellement le premier. Il propose d'optimiser l'espérance d'une distance. Il utilise principalement le cours de première année sur les variables aléatoires discrètes. Sa difficulté est supérieure à celle du premier problème. Il nécessite du soin et de la précision dans les calculs des séries et les nombreuses manipulations d'équivalences et d'inégalités. Ce problème se termine par une question d'informatique sous forme d'un programme à compléter.

Problème 3 Le troisième problème se propose d'étudier à nouveau l'optimisation dans un problème de temps d'arrêt. Il utilise de manière fine, mais guidée, les variables discrètes et à densité. Il fait appel à une étude d'une fonction d'une variable réelle pour déterminer les éventuels optimums. Il se termine par l'étude d'un exemple et d'une simulation en Pascal.
Le thème abordé est intéressant mais ce problème souffre de graves approximations dans l'énoncé, principalement au niveau des hypothèses sur les fonctions densité et de répartition utilisées. Les conditions de régularité de celles-ci font défaut : il n'est donc pas possible de répondre correctement aux questions sur la dérivabilité des fonctions étudiées. Le support de la densité n'étant pas précisé, le domaine de définition de la fonction à

optimiser n'est pas connu : la question d'une limite en $+\infty$ est alors bien gênante ! Enfin, l'exemple final d'une loi uniforme est déroutant car il ne rentre pas dans le cadre de l'étude précédente.

Une épreuve intéressante, progressive, sélective sans être hors de portée. Elle utilise une bonne partie du programme de probabilités, de l'analyse et la présence de questions d'informatique est bienvenue. On regrettera les fautes dans l'énoncé du troisième problème qui ont dû perturber les candidats l'ayant abordé. Il est étonnant qu'une telle accumulation d'erreurs d'énoncé ait pu échapper à la relecture du sujet. Il est enfin à noter qu'aucun des deux sujets de l'ESSEC n'a donné lieu à des questions d'algèbre linéaire, partie importante du programme de ECE.

2.6 ESSEC 2009 voie E math 2

Cette année, l'épreuve ESSEC II voie économique est un problème en quatre parties, plus ou moins indépendantes traitant d'un seul thème : la minimisation du risque quadratique de plusieurs suites de variables aléatoires.
La première partie est une vérification du cours sur l'estimation. Elle permet de montrer que, contrairement à une vue "naturelle" des choses, l'estimateur qui minimise le risque quadratique n'est pas nécessairement sans biais.
La deuxième partie, plus technique, compare les risques quadratiques de deux estimateurs d'une loi de Poisson de paramètre θ inconnu.
La troisième partie, beaucoup plus théorique et calculatoire, introduit l'information de Fischer dans le cas discret, puis dans le cas gaussien. Subsiste un détail de définition au III. A.3.b. Il aurait été bienvenu de rappeler le théorème de transfert au début de la partie.
La quatrième partie est faite pour distinguer les futurs HEC-ESSEC du reste du monde. Elle démontre le théorème de Cramer-Rao, puis, grâce à une extension (donnée) de celui-ci, on montre des qualités optimales ou non d'estimateur sans biais de θ ou de $e^{-\theta}$. On réutilise, au passage, les techniques de la partie I.

Épreuve progressive qui aura permis à chaque candidat d'aborder une partie non négligeable du sujet (les parties I et II sont relativement accessibles à de nombreux candidats). Par rapport à l'an passé, nous nous félicitons de nombreuses améliorations (progressivité, pas de questions bloquantes, des questions abordables dans les parties II et III). Si cette épreuve est belle, nous pouvons tout de même regretter qu'elle ne porte que sur une infime partie du programme de deuxième année.

2.7 ESC 2009 voie E

Exercice 1 : Algèbre linéaire
Application de la réduction des matrices (2×2) à l'étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$, à savoir $M \mapsto AM - MB$ où A et B sont des matrices (2×2). Les notions fondamentales du cours sont mises en oeuvre dans cet exercice.

Exercice 2 : Analyse , fonctions d'une et deux variables
Partie 1 et 2 : Étude d'une approximation d'une racine réelle du polynôme $x^4 - 4x + 1$ par une suite définie par une méthode de point fixe.
Partie 3 : En liaison avec ce qui précède, étude d'un extrémum local d'une fonction polynomiale de deux variables, par la voie standard du cours.

Exercice 3 : V.A.R. dicrètes
Étude d'un couple de VAR discrètes, non indépendantes, de lois binômiales. Elles modélisent une expérience aléatoire à deux niveaux (choix d'urne puis tirage d'une boule). Le but est de calculer la covariance de ces deux V.A.R. Avec une bonne progressivité, en démarrant sur des questions élémentaires, ce texte doit permettre aux élèves sérieux, même faibles, de tirer leur épingle du jeu.

Exercice 4 : V.A.R. à densité
Transfert par translation d'une V.A.R. de loi exponentielle et estimation du paramètre de ce transfert par un estimateur sans biais. L'exercice contrôle la connaissance des points fondamentaux du cours et se termine par un calcul du risque quadratique de cet estimateur. La question 4 valorise les étudiant(e)s qui ont investi un minimum dans le cours sur « l'estimation ».

Ces quatre exercices couvrent largement (sauf la programmation pour ce millésime) les notions et techniques des programmes de première et deuxième année, via un cheminement progressif dont les parties calculatoires n'offrent pas de difficultés. L'accent est bien mis sur les raisonnnements et permet de distinguer les candidats les plus sérieux de ceux qui se cantonnent aux recettes stéréotypées. Leurs conceptions permettent d'évaluer, sans les décourager par des calculs longs, et en donnant les résultats intermédiaires, les candidat(e)s aux Écoles recrutant sur épreuves ESC. Le sujet reste toutefois, par sa longueur, assez discrimant pour l'ensemble des étudiants de la filière économique. Le profil des candidats potentiels a manisfestement été bien pris en compte par l'auteur ou l'équipe conceptrice de ce texte.

3 Option Scientifique

3.1 ECRICOME 2009 voie S

L'épreuve comprend deux exercices et un problème :

- **Exercice 1 :** Étude du spectre de l'endomorphisme Φ_A défini sur $M_n(\mathbb{R})$ par $\Phi_A(M) = AM - MA$, où A est une matrice réelle carrée d'ordre n symétrique, après avoir montré que Φ_A est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $< M, N >= Tr(^tMN)$.
  Exercice progressif, étude d'un exemple puis du cas général, permettant de bien évaluer les connaissances en algèbre linéaire et bilinéaire des candidats.
- **Exercice 2 :** Étude de la fonction f définie par la formule $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}dt$
  Exercice portant sur le programme d'analyse de deuxième année, permettant d'évaluer les connaissances des candidats sur les problèmes de convergence et leur aisance par rapport aux calculs.
- **Problème :** Étude du comportement asymptotique de la variable aléatoire discrète égale au nombres de boules noires obtenues, dans un jeu d'urne contenant des boules blanches et noires, de type markovien.
  Problème étudiant de façon originale un modèle classique de probabilités discrètes. Il permet au candidat de valoriser ses connaissances en probabilités discrètes, mais aussi son aptitude à mener à bien des calculs. L'écriture d'une fonction en Pascal est une question aisée qui permet de tester le candidat en algorithmique.

L'épreuve ECRICOME 2009, option scientifique, est composée de deux exercices (algèbre linéaire et bilinéaire pour le premier, intégrales sur un intervalle quelconque pour le second) et un problème (probabilités discrètes), abordables et progressifs. Elle est bien équilibrée entre les programmes des deux années, contient une question d'algorithmique et permet aux candidats ayant une bonne maitrise de leur cours de mettre en valeur leurs connaissances. En conclusion, une épreuve bien adaptée au concours commun des écoles de la banque ECRICOME.

3.2 EM LYON 2009 voie S

Cette épreuve est constituée de deux problèmes qui font appel à un bon nombre de parties du programme de première et seconde année.

Problème 1

- Partie I : Le but de cette partie est l'existence et le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ dont la valeur est fournie dans l'énoncé. Mis à part la première question qui a pu désarçonner certains candidats, le reste de cette première partie ne présente pas de difficultés et les questions s'enchaînent bien.
- Partie II : Étude d'un produit scalaire défini par une intégrale impropre sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, bornées, de classe C^1 et nulles en 0. Si l'on excepte la définition du produit scalaire, cette partie porte sur la partie d'analyse du programme des deux années.
- Partie III : Partie consacrée aux variables à densité, assez calculatoire, notamment sur les dernières questions qui n'ont dû être abordées que par les candidats faisant preuve d'une certaine aisance dans les calculs et sur le cours sur les lois à densité usuelles.

Problème 2

- Partie I : Étude de deux exemples simples permettant de se familiariser avec la notion de racine carrée d'une matrice.
- Partie II : Détermination d'une racine carrée d'une matrice de la forme $I_n + N$ où N est nilpotente. Partie assez courte faisant appel au cours (notion de polynômes d'endomorphismes et le développement limité à l'ordre 3 de $\sqrt{1+t}$).
- Partie III : Détermination des racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes. Cette partie comporte de nombreuses questions de cours ou d'applications directes du cours.
- Partie IV : Existence, unicité et détermination de la racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique et positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À nouveau, cette partie comporte de nombreuses questions proches du cours.

> Cette épreuve est constituée de deux problèmes, le premier portant principalement sur des notions d'analyse avec une partie consacrée aux variables à densité, et le second portant sur l'algèbre linéaire et bilinéaire.
> Le fait que depuis deux ans, cette épreuve comporte une partie de probabilités est un point très positif et paraît indispensable pour les écoles pour lesquelles cette épreuve est la seule épreuve de mathématiques.
> Le sujet, d'une longueur convenable, fait appel à des notions du programme de première année (limites de fonctions, développements limités, polynômes et algèbre linéaire) et de seconde année (intégrales impropres, algèbre bilinéaire et variables à densité).
> Il comporte à la fois des questions nécessitant un peu plus de réflexion ou de dextérité dans les calculs, questions qui auront permis aux meilleurs candidats de se distinguer, mais aussi des questions proches du cours qui valorisent une bonne connaissance de ce dernier et un travail régulier des candidats.
> Ce sujet a dû permettre de départager correctement les candidats pour les différentes écoles qui utilisent cette épreuve.

3.3 HEC 2009 voie S

Le but du problème, clairement énoncé, est l'étude de suites linéairement récurrentes et de leur lien avec la notion de polynôme minimal. Il utilise surtout des connaissances de 1ère année (diagonalisation et polynôme d'endomorphismes pour la 2ème année), mais il s'agit des plus délicates : nombres complexes, polynômes et algèbre linéaire. La questions sont numérotées de 1 à 20 et réparties en 4 parties

Partie I : Deux exemples

1 : Étude d'une suite récurrente d'ordre 3 : fonction en Pascal donnant le nème terme, racines complexes d'un polynôme à coefficients réels, sous forme algébrique et trigonométrique. Beaucoup de calculs.
2 : Régionnement du plan.
3 : Preuve d'une équivalence entre trois propositions concernant un polynôme et le module (ou la valeur absolue) de ses racines : aucune indication n'est donnée. Les questions 2) et 3) ne servent à rien pour la fin du I.
4 et 5 : Construction d'une suite récurrente d'ordre 2, à partir de formules de covariance. Très calculatoire.
6 : CNS de convergence de cette suite : La CN est délicate à prouver.

Partie II : Suites linéairement récurrentes d'ordre p

7, 8 et 9 : Dimension et base du $\mathbb{C}$-espace S_p des suites d'ordre p vérifiant une relation de récurrence donnée, à l'aide d'un isomorphisme classique avec C_p.
10 et 11 : Étude de l'endomorphisme de S_p qui, à une suite, associe celle obtenue en supprimant le 1er terme et en décalant d'un rang les termes suivants : matrice, polynôme annulateur (non cité), CNS de diagonalisation. Quand il y a p valeurs propres distinctes, on obtient le terme général d'une suite de S_p.

Partie III : Polynôme d'une suite récurrente linéaire

12 à 15 : Définition d'un polynôme générateur d'une suite de S_p. Preuve guidée de l'existence d'un polynôme générateur minimal à l'aide de questions courtes.
16 : Un exemple : polynôme générateur minimal d'une suite de S_3 dont on donne la relation de récurrence.

17 : Utilisation d'une application linéaire, définie par sa matrice, pour caractériser un polynôme générateur d'une suite de S_p. Théorique. Puis un exemple : polynôme générateur minimal d'une suite de S_3 dont on donne Les 7 premiers termes.

Partie IV : Polynôme minimal d'une suite récurrente linéaire

18 et 19 : Deux caractérisations d'un polynôme générateur d'une suite de S_p à l'aide du produit de deux polynômes.
20 : Interprétation d'un algorithme (non écrit en Pascal) permettant de construire le polynôme générateur minimal de la suite, définition d'une congruence de polynômes, plus restrictive que celle des entiers.

Commentaires

Le problème n'est pas répétitif : il fait appel à tout le cours d'algèbre, à un niveau si élevé que, même après deux ans de prépa, la plupart des élèves sont sortis démoralisés.
– La partie I n'est pas assez progressive. On peut regretter que les exemples ne facilitent pas la compréhension de la suite : la notion de polynôme générateur n'y est pas abordée. Il semble que cette partie, très calculatoire, permettra de valoriser les copies des candidats mal à l'aise dans un e.v de suites, mais habiles à manipuler les complexes et les trinômes du 2ème degré (somme et produit des racines).
– La partie II est dans l'esprit du programme, mais difficile cependant.
– Les parties III et IV, avec ses idéaux de polynômes, est d'un niveau trop élevé. Il faut avoir compris le problème pour traiter les deux exemples du III.

Sujet très, voire trop difficile, faisant appel à tout le cours d'algèbre, à un niveau très élevé. Cet énoncé semble inadapté pour sélectionner les 1200 admissibles à l'ESCP-EAP.

3.4 EDHEC 2009 voie S

Commentaires d'ordre général

- Sujet de facture classique : trois exercices et un problème en trois ń toutes petites ż parties.
- Le sujet semble encore moins long que celui de l'an dernier qui, lui-même, était plus court que ceux des années antérieures : avec l'évolution du niveau moyen des candidats, c'est peut-être une bonne chose.

Concernant les différents exercices

- Exercice 1 : Notion de convergence en moyenne des suites de variables aléatoires
  – Une question très simple pour débuter cette épreuve.
  – Les candidats sont bien guidés dans la démarche.
- Exercice 2 : Étude d'une série de terme général défini par une intégrale impropre.
  – Encore un exercice très guidé.
  – Les calculs en 4a et 4b sont un petits peu plus subtils que ce qui précède.
  – La question d'informatique est plutôt une question de mathématiques ce qui est un peu dommage.
- Exercice 3 : Algèbre linéaire et bilinéaire.
  – Exercice classique sur un endomorphisme de polynômes.
  – Ici, bien que le candidat soit guidé, l'expression de en fonction des coefficients de , qui s'avère très utile pour répondre rapidement à plusieurs questions, n'est ni demandée ni suggérée (même s'il y a la précision quant à la signification de en introduction).
  – La partie algèbre bilinéaire est très proche du cours, ce qui ne perturbera nullement les candidats.
- Problème : Analyse et probabilités.
  – La partie 1 porte encore sur les séries. L'indication en question 2a n'est peut-être pas très judicieuse à ce moment du sujet, elle aurait davantage eu sa place en 2b pour travailler sur deux techniques différentes.
  – La partie 2, assez simple sauf à la question 2, comporte une légère ambiguïté qui n'a pas dû perturber les candidats (sauf peut-être les meilleurs) sur la continuité de la fonction en 0 donnée en introduction. Le calcul de l'intégrale à la question 2 a dû se révéler discriminant.
  – La partie 3, qui porte sur la loi du maximum d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, est classique mais non guidé : gageons qu'ici encore, la question 2a a été discriminante.

Les exercices, très guidés, auront dû aider les candidats moyens à montrer leurs savoirs-faire. Quelques questions nécessitant un peu plus de dextérité dans les calculs auront certainement permis aux meilleurs candidats de faire la différence. Le sujet utilise une large partie du programme des deux années de préparation ce qui valorise le travail régulier des candidats. Regrettons seulement que les probabilités discrètes le soient un peu trop et que l'informatique n'en soit pas vraiment.

3.5 CCIP 2009 voie S

Commentaire détaillé

Partie I : étude de la loi, de l'espérance et de la variance du sup et de l'inf de n variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Plusieurs questions sont soit simples, soit classiques soit d'une difficulté raisonnable. La simulation en Pascal demandée est classique.
Partie II : étude du couple (inf, sup) définie en **I**. Cette partie devient rapidement plus technique ; en **9.b** il semble évidemment recommandé de réutiliser des calculs fait en **8.a** ce que l'énoncé n'indique pas. On obtient l'espérance de l'inf conditionnelle au sup, résultat qui sera utilisé dans la partie **IV**.
La **partie III** recherche la meilleure approximation, au sens des moindres carrés, d'une variable par une fonction d'une autre. La question **10** comporte une erreur d'énoncé : il faut supposer les nombres $t_1, t_2, \ldots, t_N$ *distincts*. Les questions **14** et **15** sont difficiles.
La **partie IV** explicite un estimateur sans biais optimum pour estimer N à partir de la valeur prise par le sup. La question **17.a** est intéressante ; puis on peut encore trouver plusieurs questions abordables. L'équivalence en **20.b** est déroutante : dans le premier membre, la variable N est muette, dans le second il s'agit de la variable N déclarée quelconque supérieure ou égal à 1 au début de l'énoncé.

Le sujet porte uniquement sur les probabilités discrètes. il n'est pas d'une difficulté conceptuelle trop importante par rapport aux années précédentes mais il est très long (43 questions) et parfois très technique. On trouve des questions abordables dans chaque partie.
La longueur même du sujet fait que plusieurs thèmes sont évidemment abordés (loi du min et du max, loi du couple, estimation, meilleure approximation d'une variable par une fonction d'une autre).
On retrouve cependant plusieurs fois des raisonnements voisins dans les parties III et IV, avec en particulier un usage intensif de la formule de l'espérance totale.
Une erreur au début de la partie III ne devrait pas avoir de conséquences fâcheuses.
On apprécie la présence d'une simulation en Pascal.

3.6 ESSEC 2009 voie S

Problème découpé en 3 parties. Parties 1 et 2 : algèbre linéaire, partie 3 : analyse.

Partie 1 : Etude de propriétés des matrices à diagonale strictement dominante On commence par définir cette notion, on démontre l'inversibilité d'une telle matrice, puis le théorème de Gershgöring, et enfin la positivité des coefficients de l'inverse d'une matrice à diagonale strictement dominante vérifiant une propriété supplémentaire. Aucune difficulté dans cette partie qui utilise essentiellement les propriétés du calcul matriciel et certaines caractérisations classiques des matrices inversibles, des matrices diagonalisables. (diagonalisation effective d'une matrice 3x3 et calcul de l'inverse de $A + \alpha I$ grâce à cette diagonalisation). Les calculs sont courts et aucune question n'était de nature à déstabiliser les candidats.

Partie 2 : Etude de la convergence d'une suite d'inverses de matrices

1. On commence par définir la convergence d'une suite de vecteurs ou de matrices, et prouver des caractérisations de cette convergence par la norme uniforme pour les vecteurs ou la norme1 pour les matrices et prouver diverses propriétés de cette notion de convergence. Les calculs sont un peu plus théoriques, on utilise beaucoup les propriétés de majorations, mais les formules ne sont pas lourdes à manipuler. Le sens direct des questions 1a et 1b utilise la définition théorique de la limite d'une suite, et certaines manipulations d'inégalités de maximums sont certainement mal faites par une partie des candidats, mais rien n'est vraiment difficile.
2. Convergence de la suite des inverses : les choses deviennent ici plus théoriques, les étudiants auront certainement eu un peu plus de mal à avoir " les bonnes idées " pour traiter cette question mais cela reste faisable pour les meilleurs.

3. Utilisation directe des résultats précédents.
4. Etude d'un exemple, application des résultats précédents, sans difficulté.

Partie 3 : Résolution d'un système fonctionnel.

1. Existence et unicité de la solution, positivité si f est positive, exemple. Sans difficulté, utilise la notion de primitive d'une fonction continue.
2. Inégalité de Taylor Lagrange : question un peu délicate, il est probable que peu de candidats auront traité 2a correctement car il fallait voir qu'on appliquait 2 fois la formule bien connue, pour $(x, x+h)$ d'une part et $(x, x-h)$ d'autre part et qu'on les regroupait.
3. Majoration des coefficients de A-1 grâce aux inégalités précédentes. Pas de difficulté majeure.
4. Toujours des majorations sans difficulté excessive.
5. Etude d'un exemple.

Problème de longueur et de difficulté tout à fait raisonnables, agréable et pas répétitif, proche de l'esprit du programme bien qu'utilisant quelques notions nouvelles. Il est beaucoup plus adapté au public visé que les problèmes des années précédentes. On peut cependant regretter que le domaine des connaissances utilisées ne soit pas plus étendu par rapport à notre programme. Certains peuvent également penser que quelques questions plus difficiles auraient eu leur place dans une épreuve ESSEC. En conclusion cette épreuve a certainement joué correctement son rôle d'évaluation des candidats à l'Ecole concernée.

3.7 ESC 2009 voie S

Ce sujet se découpe en quatre exercices de longueur et difficulté en gros équivalentes, portant sur différentes parties du programme, le deuxième exercice étant un peu plus consistant que les trois autres.

Exercice 1 Algèbre linéaire et bilinéaire. On étudie les propriétés des matrices de la forme $M(a) = aI+(1-a)H$ où H vérifie $H^2 = H$. On définit sur $\mathbb{R}^3$ un produit scalaire $\langle X;\ Y\rangle = {}^tXM(a)Y$. On étudie une famille orthogonale pour ce produit scalaire dans le cas d'une matrice H particulière. Pas de difficulté majeure dans cet exercice en lien étroit avec le cours.

Exercice 2 Etude d'un endomorphisme φ de l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ défini à l'aide d'une intégrale. On étudie les propriétés de dérivabilité de $\varphi(f)$ et on en déduit l'injectivité de φ puis les propriétés de certains éléments propres de l'endomorphisme. Les questions 2b et 4b sont un peu plus délicates, le reste est sans difficulté.

Exercice 3 Cet exercice porte sur les variables à densité. On fournit un programme turbo Pascal de modélisation de variables aléatoires. On étudie les lois des variables aléatoires ainsi modélisées, puis celle d'une nouvelle VAR fonction des précédentes. Exercice très classique de recherche de la loi d'une VAR fonction d'une autre, ainsi que sur la stabilité de la loi Gamma.

Exercice 4 Deux méthodes de test pour la contamination de bouteilles de lait par une bactérie. Comparaison des deux méthodes. Estimateur, intervalle de confiance, Bienaymé Tchebychev . Du très classique.

Sujet bien adapté au public visé, qui couvre une partie assez large du programme et utilise essentiellement le cours et des méthodes très classiques. Peu de difficulté et les candidats peu matheux mais sérieux auront pu montrer avec ces exercices qu'ils ont fourni des efforts pendant leur préparation.

4 Option Technologique

4.1 ECRICOME 2009 voie T

Descriptif

Exercice 1 Résolution d'un système linéaire de deux suites récurrentes en utilisant une matrice carrée d'ordre 2. Diagonalisation. Application au calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 3.

Exercice 2 Étude de la fonction définie sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Propriétés de la convexité.

Encadrement de $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ à l'aide d'encadrements de f par des fonctions constantes, des fonctions affines déduites de la convexité et d'intégration par parties.

Exercice 3 Loi binomiale, loi géométrique "tronquée". Utilisation de la formule des probabilités totales conduisant à l'étude d'une suite arithmético-géométrique. Loi normale.
Étude d'une variable à densité et calcul de son espérance.

Commentaires

Exercice 1 : Le fait de donner les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n aurait permis aux plus faibles de traiter les deux dernières questions de l'exercice.

Exercice 2 : Des questions classiques en dehors de la question **2.1.**5 où la position relative de la courbe par rapport à une sécante est demandée.
Les quatre premières questions relatives au calcul intégral ne posent pas de difficultés majeures. Cependant les expressions des encadrements ne sont pas simples, elles peuvent dérouter les candidats. De plus il aurait été intéressant de faire apparaître les précisions respectives de ces encadrements.

Exercice 3 : La question 2 aurait été facilitée en attribuant une valeur à p et aurait évité toute confusion avec p_n. La question relative à la limite de la suite (p_n) est ambiguë : fallait-il calculer la valeur de α ?
Par ailleurs l'énoncé manque de rigueur lorsqu'il introduit X :
" *le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel peut se représenter par une variable* X "
alors qu'il s'agit de définir une variable égale à la différence entre l'instant d'arrivée du bus et l'horaire officiel. Fort heureusement la question ne portait que sur la probabilité que le bus soit en retard de 7 minutes.

Ces quelques réserves mises à part, il s'agit d'un bon sujet, de longueur et de difficultés raisonnables, faisant appel à une large partie du programme et en respectant l'esprit . Il aura permis à un étudiant sérieux de mettre en valeur les connaissances et le savoir-faire acquis pendant les deux années de classe préparatoire.

4.2 ESCP-EAP 2009 voie T

Descriptif

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 Étude d'une fonction rationnelle f et de la suite récurrente $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.
Encadrement de $\dfrac{1}{u_n}$ à l'aide d'une suite auxiliaire et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln n$ pour en déduire la limite de $\left(nu_n\right)$.

Exercice 2 Après choix d'une urne au hasard parmi trois, tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à l'apparition éventuelle d'une boule blanche. Loi de probabilité de la variable aléatoire associée et calcul de son espérance.

Exercice 3 Étude de la fonction f définie par $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n}dx$ si $n\geqslant 2$.
Application à une densité de probabilité.

Exercice 4 Étude de deux suites numériques (u_n) et (v_n) définies par l'intermédiaire de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2. Introduction du déterminant d'une matrice pour établir l'égalité $u_{n-1}u_{n+1}-u_n^2=\left(-1\right)^n$.

Commentaires

Chacun des exercices comporte des questions tout à fait abordables, les dernières plus délicates nécessitant davantage d'initiative ; l'ensemble reste suffisamment progressif pour que les élèves sérieux exploitent leur travail et que les meilleurs se distinguent. Globalement ce sont de très bons exercices.
Quelques remarques.
Exercice 2 : On peut regretter que trop de résultats intermédiaires aient été donnés, les élèves ayant acquis de bonnes connaissances en probabilités n'auront pu être réellement valorisés.
Exercice 4 : On est surpris par l'énoncé qui impose de déduire la croissance de la suite (u_n) de l'égalité : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ alors qu'auparavant on a obtenu : $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_n \geqslant 0$.
Le raisonnement par l'absurde n'est pas d'un usage fréquent en voie T mais ne concerne qu'une question sans incidence pour la suite de l'exercice. Cette même question fait appel à la propriété des suites croissantes : convergentes ou de limite égale à $+\infty$, propriété également rarement utilisée.
Cet exercice sur les suites et le calcul matriciel changeait des habituelles diagonalisations même s'il ne menait qu'à de belles égalités.

Le sujet est équilibré et aborde presque tous les thèmes clés du programme. Il devrait permettre un large éventail des notes. Les concepteurs tiennent désormais compte de la spécificité de la voie T. Ils respectent les limites et l'esprit du programme tout en proposant des exercices intéressants aux difficultés croissantes.

4.3 ESC 2009 voie T

Descriptif

Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1 Calcul de la puissance nième d'une matrice carrée d'ordre 3 à l'aide de la formule du binôme de Newton dans le cas d'une matrice nilpotente. Application à l'étude de trois suites numériques.

Exercice 2. Etude de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 1\right) e^{-x}$. Convergence de la suite (u_n) satisfaisant $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 3. Tirages successifs sans remise d'une boule après choix d'une urne. Loi binomiale, approximation par une loi de Poisson. Loi géométrique.

Exercice 4 . Variable à densité utilisant les propriétés de la loi exponentielle de paramètre 1.

Commentaires

Quatre exercices très classiques couvrant une grande partie du programme.
La formule du binôme rarement maîtrisée par les élèves ne gênait en rien la poursuite de l'exercice 1 puisque le résultat était donné. Même remarque concernant l'inégalité des accroissements finis qu'il s'agissait de repérer dans l'exercice 2.
Une question de cours et des étapes suffisamment détaillées devaient permettre à un élève sérieux de traiter l'exercice 4 malgré la notion de variable à densité.

Un très bon sujet pour des élèves ayant travaillé avec régularité.

La commission de Mathématiques de l'APHEC