Rapport sur les épreuves de mathématiques des concours 2011 des classes préparatoires économiques et commerciales

APHEC

septembre 2011

Ce document est public, et disponible sur le site de l'APHEC (`http://aphec.it-sudparis.eu`), rubrique "Observatoire des concours / Rapports annuels sur les concours"

Introduction

"*Il arrive que des erreurs matérielles s'introduisent dans le libellé des énoncés* [des sujets d'examen ou de concours]. *Certaines sont vénielles, d'autres cocasses, d'autres enfin peuvent donner lieu à des méprises dommageables. De telles erreurs, sources de perplexité et de confusion pour les candidats, n'ont pas épargné le concours d'entrée d'établissements aussi prestigieux que les Écoles normales supérieures ou l'École polytechnique. Des solutions adaptées sont généralement mises en œuvre par les jurys pour limiter le préjudice subi par les élèves et éviter de pénaliser trop sévèrement ceux qui se sont laissé abuser*". Ainsi s'exprimait Hélène Carrère d'Encausse, Secrétaire perpétuel de l'Académie française, dans une lettre datée de mai 2010 au sujet d'une erreur dans le sujet de composition française[1] du concours d'entrée des deux ENS Ulm et Lyon option Lettres.

Cette année, certaines des épreuves de mathématiques des concours d'entrée des écoles commerces ont été touchées par ce fléau, particulièrement en option scientifique. Toute la gamme a été jouée : une erreur a été rectifiée à temps (math E ESSEC), d'autres n'ont pas été rectifiées du tout, la consigne à transmettre aux candidats ("*pas de commentaire*") ayant souvent été mal interprétée : "*pas d'erreur*" (math S EDHEC). Enfin, une erreur a été détectée en cours d'épreuve (Math 2 S CCIP), la direction des concours a tenté de transmettre à l'ensemble des candidats un correctif, mais les délais d'acheminement ont été extrêmement variables d'une centre de concours à l'autre. Il est par ailleurs cocasse de remarquer que pour cette dernière épreuve, l'en-tête indiquait une mention servant à dédouaner les organisateurs des concours d'une intervention en cours d'épreuve : "*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre*"... L'intervention de la BCE pour diffuser le correctif qu'elle croyait nécessaire a prouvé une réactivité certaine, la direction des concours a bien pris toutes les mesures nécessaires pour agir au plus vite, mais la complexité de l'organisation des épreuves de concours a rendu difficile la progression du rectificatif, et le moment où les candidats ont eu la nouvelle consigne a été très variable d'un centre à l'autre, ce qui peut laisser craindre une rupture d'égalité de traitement.

Les expressions "*le préjudice subi par les élèves*" et "*éviter de pénaliser*" indiquent clairement qu'une erreur dans un sujet ne peut que défavoriser les candidats, et toute action postérieure à la découverte de l'erreur ne peut que limiter en partie les dommages, mais en aucun cas les effacer. Pour un professionnel des mathématiques, professeur ou concepteur, la posture qui consiste à minimiser la portée de l'erreur en arguant du fait que les questions restaient "faisables" malgré l'erreur du sujet revient à nier totalement les différentes réactions des candidats et leurs conséquences : la perplexité, suivie par le doute voire

[1] Dans le sujet en question qui était une citation à commenter, le mot "affection" avait été remplacé par le mot "affectation".

la confusion, la perte de temps engendrée, ou encore la rupture de la démarche mathématique du problème. Malgré toute l'attention des correcteurs au moment de l'évaluation des copies, malgré les tentatives louables d'adaptation du barême, le contenu des copies ne reflète en rien les hésitations ou l'embarras dont ont été victimes l'immense majorité des candidats.

Dès la découverte des erreurs, la question posée immédiatement au concepteur par le responsable des concours a été : "*l'erreur est-elle polluante ?*". Cette notion de "pollution" mesurant la cohérence mathématique du sujet n'est finalement que superficielle. La vraie "pollution", en revanche, n'apparaît pas clairement dans une copie : ne pouvant être généralement perçue par les correcteurs, et encore moins mesurée, elle se trouve trop souvent minimisée, voire niée.

Dès lors, fallait-il faire recomposer les candidats ? Oui, si l'on s'en tient à un strict respect du principe d'égalité de traitement, oui encore si on souhaite juger les candidats sur les réelles capacités mathématiques, et non pas sur leurs capacités d'adaptation et de réaction face à un sujet dénaturé. En revanche, le réponse est non si l'on commence à prendre en compte certaines contraintes organisationnelles et matérielles : une demi-journée supplémentaire pour les candidats, convocations et organisation des concours à modifier, coûts supplémentaires à supporter, sans compter une image écornée par un incident qui serait rendu public, et non plus géré en interne. Finalement, la décision finale résulte d'un compromis, mais on peut toujours craindre ou suspecter que ce sont de mauvaises raisons qui ont prévalu lorsque l'épreuve est corrigée en l'état.

Les sujets de mathématiques sont très sensibles aux erreurs de conception, et les formes sous lesquelles elles apparaissent sont très variées : cela peut aller de la formulation maladroite à l'erreur typographique, en passant par des résultats erronés. C'est cette grande sensibilité qui fait de la conception une tâche lourde et délicate, l'APHEC en est bien consciente. Aussi, nous savons que cette série d'incidents n'a fait que renforcer la vigilance des concepteurs des futurs sujets, et nous ne pouvons qu'espérer un cru irréprochable, tant pour la qualité mathématique des sujets et leur adéquation aux objectifs d'évaluation, que pour la rigueur du cobayage et de la relecture.

Table des matières

1 Les épreuves de mathématiques 2011

1.1 Option Economique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve
Mercreci 20 avril 2011 de 8h à 12h Ecricome voie E	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (4) ICN NANCY (5) Sup de Co REIMS (5) ESC ROUEN (5) ESC TOURS-POITIERS
Lundi 2 mai 2011 de 8h à 12h EML voie E	EML	(4) EM Lyon (4) Skema (4) Ecole Magt Normandie (3) ESC Bretagne Brest (3) ESC Chambéry Savoie (4) ESC Clermont (3) ESC Dijon Bourgogne (4) ESC La Rochelle (4) ESC Pau (4) ESC Rennes (4) ESC Saint Etienne (5) ESC Troyes (4) Ecole Magt Strasbourg (4) ISC Paris (9) ESM de Saint-Cyr
Mardi 3 mai 2011 de 8h à 12h HEC voie E	HEC	(4) HEC (4) ESCP-EAP
Vendredi 6 mai 2011 de 8h à 12h EDHEC voie E	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (2) ESC Amiens Picardie (9) ESC Grenoble (GEM) (4) ESC Montpellier (7) ESC Toulouse (5) INSEEC (Paris-Bordeaux) (6) TELECOM EM (3) ENAss (option Mathématiques) (2) ISCID (4) ISG
Lundi 9 mai 2011 de 8h à 12h ESSEC voie E math 2	ESSEC	(4) HEC (4) ESSEC MBA (3) ESCP Europe (2) EM Lyon
ESSEC Mardi 10 mai 2011 de 14h à 18h ESSEC voie E math 1	ESSEC	(4) ESSEC

1.2 Option Scientifique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve
Mercreci 20 avril 2011 de 8h à 12h Ecricome voie S	Ecricome	(5) ESC BORDEAUX (5) EUROMED MARSEILLE (5) ICN NANCY (5) Sup de Co REIMS (7) ESC ROUEN (5) ESC TOURS-POITIERS
Lundi 2 mai 2011 de 8h à 12h EML voie S	EM Lyon	(4) Skema (6) Ecole Magt Normandie (6) EM Lyon (3) ESC Bretagne Brest (3) ESC Chambéry Savoie (5) ESC Clermont (5) ESC Dijon Bourgogne (4) ESC La Rochelle (3) ESC Montpellier (4) ESC Pau (5) ESC Rennes (4) ESC Saint Etienne (5) ESC Troye (5) Ecole Magt Strasbourg (6) ISC Paris
Mardi 3 mai 2011 de 8h à 12h HEC voie S	HEC	(6) HEC (6) ESCP EUROPE (25) ENSAE
Vendredi 6 mai 2011 de 8h à 12h EDHEC voie S	EDHEC	(8) EDHEC (8) AUDENCIA Nantes (3) ESC Amiens Picardie (8) ESC Grenoble (7) ESC Toulouse (6) INSEEC (7) TELECOM EM (3) ENAss (option Mathématiques) (2) ISCID (5) ISG
Lundi 9 mai 2011 de 8h à 12h CCIP voie S	CCIP	(5) HEC (5) ESSEC MBA (4) ESCP Europe (3) EM Lyon
Mardi 10 mai 2011 de 14h à 18h ESSEC voie S	ESSEC	(6) ESSEC MBA

1.3 Option Technologique

Date et appellation	Concepteur	(coefficient) Ecoles utilisant l'épreuve
Mercreci 20 avril 2011 de 8h à 12h Ecricome voie T	Ecricome	(4) ESC BORDEAUX (4) EUROMED MARSEILLE (3) ICN NANCY (4) Sup de Co REIMS (4) ESC ROUEN (4) ESC TOURS-POITIERS
Lundi 9 mai 2011 de 8h à 12h ESCP Europe voie T	ESCP Europe	(5) ESCP Europe (3) AUDENCIA Nantes (6) Skema (5) EDHEC (3) EM Lyon (10) ESC Grenoble (4) ESC Rennes (5) ESC Toulouse (5) HEC (5) ESSEC MBA (4) ESC Lille (5) TELECOM EM
Mardi 10 mai 2011 de 14h à 18h ESC voie T	ESC	(4) Ecole de Management de NORMANDIE (3) ESC Amiens Picardie (4) ESC Bretagne Brest (4) ESC Chambéry Savoie (2) ESC Clermont (2) ESC Dijon (3) ESC La Rochelle (5) ESC Montpellier (4) ESC Pau (4) ESC Saint-Etienne (4) ESC Troyes (3) Ecole Magt Strasbourg (4) INSEEC (3) ISC Paris (2) ISCID (4) ISG

2 Option Economique

2.1 ECRICOME 2011 voie E

L'épreuve comporte trois exercices :

Exercice 1 : Décomposition de Dunford de matrices sur des exemples en dimension 2 et 3. D'une décomposition de Dunford de A on déduit, grace au binôme une décomposition de A^n. Exercice qui sera sans doute assez peu discriminant, tout les résultats intermédiaires étant donnés.

Exercice 2 : – Partie I : Etude d'une fonction φ,d'un encadrement de l'unique solution $\alpha/\varphi(\alpha) = 0$. Calcul de $\int_0^\alpha \varphi(t)dt$ (il faut trouver $\frac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}$, donc utiliser $\ln\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$; et faire l'intégration par parties sur $[\varepsilon, \alpha]$ ($\varepsilon \in]0; \alpha[$ puis faire tendre ε vers 0) On termine cette partie par un peu de turbo-pascal permettant d'approcher α à $\frac{(2-\sqrt{2})}{2^7} = 4.576\,5 \times 10^{-3} \simeq 0.5 \times 10^{-3}$ près, par la méthode de la dichotomie.

– Partie II : Etude des points critiques et extrema éventuels de $f(x;y) = xy + \ln x \ln y$
Resolution de $\begin{cases} p(x,y) = 0 \\ q(x,y) = 0 \end{cases}$ (on trouve comme seul point critique $A = (\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha})$, donné dans l'énoncé)
$r(x;y)$ $s(x;y)$ $t(x;y)$ sont donnés par l'énoncé, il ne reste qu'à "vérifier" les calculs et montrer que A n'est pas un extremum.
Seule difficulté de cette partie : remplacer dès que possible $\ln\alpha$ par $\frac{1}{\alpha^2}$.

Exercice 3 : – Partie I : Dénombrement et variable aléatoire discrète.
les questions 1) et 2) bien qu'élémentaires risquent de déstabiliser un peu le candidat moyen. heureusement que $P(N)$ est donné en 3.
On aurait pu aller plus loin dans l'étude de $Z = \sum_{i=1}^{10000} Z_i$ (où Z_i désigne le gain du forain au i-ème coup). (Calcul de variance, simulation en turbo-pascal, etc...)

– Partie II : Du point de vue du joueur
La question 1c) est peut-être mal posée. N'aurait on pas du dire Soit T la variable égale au gain (positif ou négatif) du joueur, plutôt que soit T la perte du joueur (on pourrait considérer que la perte est nulle s'il y a un gain positif.
Ce sera la question dure de cette partie.

– Partie III :Jeu truqué
La question 3, qui relie "taux de trucage" et gain de la société sera certainement peu traitée. (Question un peu difficile)

Si les deux premiers exercices sont de facture standard et assez simples, l'exercice 3 risque d'être très discriminant, plus par sa façon d'être posé que par sa difficulté réelle.

2.2 EML 2011 voie E

L'épreuve, se compose comme d'habitude de 3 exercices : Le premier d'analyse, le second d'algèbre et le troisième de probabilités. Hormis la convergence des VAR et l'estimation, l'ensemble du programme est mobilisé . Ceci donne donc à chaque candidat l'occasion de montrer son savoir-faire. Par ailleurs, l'alternance des questions où la réponse est donnée et de celles où ce n'est pas le cas, devrait jouer pleinement son rôle de filtre.

Exercice 1 : – Partie 1 : Une étude de fonction f. Les candidats sont pris par la main. On pense ici que l'on cherche à opérer un premier tri négatif.

– Partie 2 : Une suite récurrente, liée à f. La récurrence à établir n'est pas «instantanée» et la présence d'une question informatique rend cette partie plus ouverte. Un second tri va s'opérer.

– Partie 3 :Extremum d'une fonction de deux variables (liée à f).
Pour ne pas «tuer un candidat qui aurait fait une erreur de signe», les résultats indiqués et les conseils de méthode proposés dans les questions intermédiaires sont les bienvenus pour aider à déterminer le point critique. Une formulation moins détaillée et plus ouverte aurait sans doute éliminé beaucoup d'étudiants dans cette partie.

EXERCICE 2 : – Partie 1 : Racine carrée d'une matrice symétrique
Dans cette partie, seules les valeurs propres sont données, tout le reste doit être découvert par le candidat. C'est peut-être un peu trop sélectif, sachant qu'il y a une deuxième partie abstraite d'algèbre.
Cela étant, un candidat qui a appris son cours et fait les exercices de bases ne devrait pas être dérouté par des questions somme toute très simples.
Par ailleurs, le rang de A était hors programme.

– Partie 2 : Le point de vue endomorphisme
Partie qui plaira aux meilleurs candidats, car les noyaux et images ne sont pas les objets préférés des élèves de cette voie.

EXERCICE 3 : – Partie 1 : La loi binomiale et covariance. Exercice demandant de réellement comprendre le protocole. Un résultat (dans la question 3 par exemple), n'aurait pas défiguré l'exercice, mais aurait permis sans doute à de nombreux élèves de montrer leur savoir faire.
– Partie 2 : Variable à densité conditionnée par une discrète Ici, les élèves seront sans doute plus à l'aise, grâce à la présence de quelques résultats.

> L'épreuve est accessible et équilibrée pour les étudiants concernés, même si quelques résultats supplémentaires n'auraient pas été superflus. Elle valorisera les candidats qui ont pris la peine d'assimiler le cours au delà de la mémorisation de «recettes».
> Elle triera tout-à-fait correctement les candidats.

2.3 HEC 2011 voie E

Exercice : La première partie est classique : on diagonalise une matrice d'ordre 3 symétrique. La suite est plus nettement abstraite : on cherche une condition nécessaire pour qu'une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit inversible. Pour cela, il faut savoir manier les formules du produit matriciel en dimension n.
On peut regretter l'absence de lien clair entre les deux parties de cet exercice.

Problème :
Partie I : On calcule des limites de fonctions définies à partir d'une intégrale. Dans un premier temps, on étudie des exemples et on fait des calculs explicites, les limites demandées s'obtiennent assez facilement. En revanche, dans le cas général, même si les questions sont détaillées, le recours à des " pour obtenir une limite rend les choses plus complexes. La partie se termine par la recherche du point critique d'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ de degré 2. A noter : une (petite) erreur d'énoncé, dans la question v_x est continue sur $[-\alpha;\alpha]$ et non sur $\mathbb{R}$. A condition de connaître la définition d'un point critique, les connaissances de première année étaient suffisantes pour cette partie.

Partie II : On fait des calculs d'espérances, de variances, de covariances de variable aléatoires qui dépendent d'une variable aléatoire X dans deux cas particuliers :

- On suppose que X suit une loi de Bernoulli $B(\frac{1}{2})$. Les calculs sont assez simples et sont indépendants de la partie I.
- On suppose que X suit une loi uniforme sur $[-1;1]$. Il faut faire régulièrement des retours dans la partie I pour utiliser des calculs déjà faits. Les calculs de limites nécessitent encore l'utilisation des ϵ.

Dans la question 8a, on demande de rappeler la variance d'une loi uniforme sur un intervalle... ce qui n'est pas un résultat au programme !

Partie III : La précaution "On confond tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynômiale associée" est inutile étant donné le programme. Cette partie est indépendante des parties I et II sauf pour la question 14a. On y étudie essentiellement une famille P_n de polynômes.

- Les questions 12 et 13 demandent une bonne maîtrise des calculs sur les polynômes (degré, coefficient dominant, dérivation), de l'intégration par parties et du raisonnement par récur- rence. *Dans la question 13a, l'hypothèse $R \in \mathbb{R}[X]$ aurait pu être remplacée par $R \in C^\infty(\mathbb{R})$... ce qui aurait utile pour la question 14b.*
- Dans la question 14, le calcul de la limite est difficile à cause du nombre de variables intervenant dans les formules : x, h, t, n, P_n, f.
- Dans la question 15, on demande de montrer qu'une famille de polynômes est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ce qui est immédiat à l'aide de la propriété (hors programme !) des degrés échelonnés. Par ailleurs, quel est l'intérêt de lier le α de cette question au α de la partie I puisque f est définie sur $\mathbb{R}$ dans toute la partie III ?
- Pour le reste, c'est du calcul algébrique. Ce n'est pas difficile lorsque l'on ne se perd pas dans les notations et que l'on pense à utiliser des résultats des questions précédentes. En dehors de la question sur la base de $\mathbb{R}_n[X]$, cette partie, très technique et calculatoire, pouvait être traitée avec les connaissances de première année.

Sujet difficile pour les élèves de la voie économique, qui risque de décourager les élèves moins solides qui visent l'ESCP ; on peut regretter que le problème "probabiliste" comporte surtout des raisonnements portant que l'analyse.

2.4 EDHEC 2011 voie E

Le sujet comporte 3 exercices et un problème.

Exercice 1 : Etude d'une fonction définie par une intégrale. Ensemble classique, incluant certains calculs techniques.

Exercice 2 : Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Là encore exercice classique, linéaire dans le sens où l'énoncé guide bien l'étude progressive de l'endomorphisme. Exercice tout à fait abordable pour un étudiant ayant bien intégré le programme d'algèbre linéaire ; il aurait peut-être été souhaitable tout de même de donner une indication quant à la matrice de l'endomorphisme, pour ne pas pénaliser les candidats qui n'auraient pas compris le fonctionnement de cet endomorphisme.

Exercice 3 : Probabilités, variables aléatoires discrètes finies. In fine, l'exercice ne présente pas de difficulté majeure, mais il a pu déstabiliser certains étudiants de la filière peu enclins aux manipulations abstraites d'événements, notamment dans les premières questions. On peut reprocher à cet exercice son intérêt essentiellement artificiel (en particulier la dernière question d'informatique).

Problème : Probabilités, variables aléatoires à densité : loi du produit $Z = XY$ lorsque X est à densité et Y discrète.
Problème intéressant, bien construit, reposant sur la méthode classique du calcul de la loi d'une fonction d'une variable aléatoire de loi connue, méthode utilisée à plusieurs reprises. L'énoncé fait aussi calculer des intégrales impropres grâce à des arguments de parité, intégrales dont les preuves d'existence nécessitent un minimum de soins. Enfin la dernière question, moins guidée, requérant un peu plus de recul, amène à la simulation informatique de Z.

Ce sujet, finalement très classique, est de niveau assez technique, mais correspond totalement aux profils des étudiants de la voie E. On pourra remarquer qu'il est surtout centré sur le domaine des probabilités.

2.5 ESSEC 2011 voie E

L'épreuve se compose de deux problèmes, portant sur la partie probabilité du programme. Le premier traite de l'évolution des intentions de vote d'un groupe sous une hypothèse de versatilité.
Le second problème porte sur la loi de Pareto et la loi de Benford.

Problème I : La partie I traite du cas particulier où il n'y a que 4 électeurs. En réduisant une matrice, on s'appercoit que l'événement "les 4 électeurs votent pour A ou pour B" est quasi certain, pourvu qu'il y ait suffisament de jours passés.

La partie II est la généralisation du résultat, qui en fait est plus simple (en partie) que le cas particulier. On montre que la probabilité que tout le monde vote pour A est égale à la proportion d'électeurs favorables à A au départ.

Problème II : Partie I : Après une question préliminaire qui fait manier changement de variable et inégalités d'intégrales, la partie I traite des propriétés de la partie fractionnaire $(X - \lfloor X \rfloor)$ d'une variable à densité, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On s'intéresse en particulier à la fonction de répartition d'une telle loi.

Partie II : On considère une loi de Pareto $Z_\lambda \hookrightarrow \mathcal{VP}(\lambda; 1)$. On définit $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$ et $Y_\lambda = \{X_\lambda\}$

On montre que $Y_\lambda \rightsquigarrow_{\mathcal{L}} U([0;1])$ $(\lambda \to 0)$

En notant α la fonction qui associe à tout réel supérieur ou égal à 1 le premier chiffre de son écriture décimale, en posant : $C_\lambda = \alpha(Z_\lambda)$

On montre que : $\lim\limits_{\lambda \to 0} P(C_\lambda = k) = \log(1 + \dfrac{1}{k})\ \forall k \in [[1; 9]]$

Ce problème demande de la finesse dans les calculs, mais les résultats étant souvent donnés, il évite aux candidats de rester "secs".

L'épreuve est parfaitement adaptée au public concerné, bien que l'on puisse lui reprocher son aspect trop probabiliste.

2.6 ESSEC 2011 voie E math 2

Le sujet, constitué d'un seul problème étudie un "procédé très élémentaire pour mélanger les cartes" qui consiste à itérer l'insertion de la carte du dessus au hasard dans le paquet. Il commence par une liste de notations, très détaillées. On pourra regretter que, dans un souci louable de simplification, l'énoncé fasse quelques entorses à la rigueur mathématique ; en particulier, l'univers ne peut pas être défini comme l'ensemble des permutations mais comme l'ensemble des suites d'insertions qui y mènent, la tribu étant engendrée par les suites amenant pour la première fois une permutation donnée en un nombre donné d'insertions. Mais ce genre de considération passe généralement bien au dessus de la tête des candidats, et un exemple très clair permettait de lever toute ambiguïté.

La partie 1 définit la variable aléatoire T égale au nombre d'insertions nécessaires pour obtenir un jeu bien mélangé. Elle permet de vérifier que les étudiants connaissent leur cours (la loi géométrique, probabilités totales et sommes géométriques).

La partie 2 détermine un équivalent de l'espérance et de la variance de T, ainsi que de l'écart entre T et son espérance. Elle se termine par une simulation informatique. Elle teste des connaissances très classiques sur la série harmonique. L'inégalité de Bienaymé-Chebychev est rappelée et les questions d'informatique, comprenant des algorithmes à écrire et d'autres à compléter, doit permettre de juger les qualités d'un étudiant dans ce domaine.

La partie 3, très courte mais très théorique, a dérouté plus d'un élève de cette option. Les questions sont cependant très guidées, et très abordables pour qui comprend ce qu'est une probabilité.

La partie 4 permet de majorer $P(T > n)$ en utilisant à nouveau la loi géométrique et un résultat élémentaire d'analyse. Il y a peu de calculs, les résultats de cours utilisés sont très élémentaires, et tous les résultats intermédiaires sont donnés.

> Ce sujet doit donc permettre d'évaluer finement les capacités à lire un énoncé et à comprendre la modélisation d'un problème en termes de probabilités et en termes algorithmiques. Il est tout à fait adapté aux étudiants de cette section.

3 Option Scientifique

3.1 ECRICOME 2011 voie S

Le sujet se compose, comme les années précédentes, de deux exercices et d'un problème ; les trois parties du problème sont annoncées comme largement indépendantes.

Exercice 1 : Algèbre linéaire et bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Il y avait une petite erreur d'énoncé : Question 1. (c) dans la dernière somme, $\ell = 0$ est écrit au lieu de $k = 0$.

Pas de difficultés particulières pour cet exercice aux questions assez classiques, qui devrait permettre aux bons élèves de se distinguer.

Exercice 2 : Fonction à deux variables, recherche d'extrema.

La première question consiste en une étude simple de fonction ; les deux questions suivantes nécessitent une connaissance raisonnable des séries exponentielles.

Les questions 5, 6 et 7 consistent en une recherche bien guidée des points critiques d'une fonction à deux variables (dont on admet qu'elle est C^2 sur l'ouvert considéré) ; la rigueur que nécessite l'ensemble du raisonnement devrait permettre un bon classement des candidats.

La question 8 est quelque peu ambiguë : faut-il comprendre "extremum local" ou "extremum global" ?

Problème :

Partie I : n étant un entier naturel non nul et $X_1,...,X_n$ étant des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1, cette première partie consiste à justifier que $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}$ suivent la même loi.

L'énoncé commence par rappeler la définition de la loi exponentielle, loi pourtant explicitement au programme et on ne peut plus classique...

La première question consiste en l'écriture, en Turbo-Pascal, d'un programme simulant Y_2 et Y_3, puis Y_{2011}... (sans doute pour convaincre les récalcitrants de l'utilité d'une boucle ?) À noter, une erreur d'énoncé assez mineure : trois points au lieu de deux dans la déclaration de `array`...

Les questions suivantes sont très (trop ?) guidées, en particulier la question 2, où l'on aboutit à la loi de Y_n, dont une densité est donnée par l'énoncé... ; les questions 3, 4 et 5 aboutissent à l'expression d'une densité pour Z_n que l'on reconnaît identique à celle obtenue pour Y_n. On utilise successivement un transfert linéaire sur une variable exponentielle, une intégration assez basique, et une récurrence basée sur la formule de convolution. La question 3. (b) peut paraître déroutante : on demande de **démontrer** que $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable à densité, alors que c'est clairement (et classiquement) une variable suivant une loi exponentielle ! "Vérifier" eût été sans doute plus approprié.

Partie II : Cette partie consiste à établir que si f est une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}_+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il n'existe pas de densité de probabilité g dérivable sur $\mathbb{R}^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$.

Il est admis par l'énoncé que l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que $\int_0^{+\infty} \mid f \mid dt$ converge est un espace vectoriel.

Là encore, les questions sont bien guidées ; cette partie porte principalement sur les intégrales généralisées et ne pose pas de problème particulier ; seules les deux dernières questions sont un peu plus délicates (car moins guidées). La dernière question porte principalement sur la notion de densité de probabilité et permet de distinguer les étudiants ayant compris ce qui a été fait auparavant (et étant capables de le synthétiser...).

Partie III : Cette partie consiste en l'étude des éléments propres de l'application (dont on commence par démontrer qu'il s'agit d'un endomorphisme) introduite en **Partie II**, qui à tout élément f de E, associe l'unique élément k_f tel que $k_f - k'_f = f$.

L'énoncé donne la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme de E (qui est un espace de dimension infinie).

Moins évidente que les deux premières, portant principalement sur de l'algèbre linéaire en dimension infinie, cette partie permettra sans doute de distinguer les meilleurs candidats (ainsi que ceux capables de résoudre la seule équation différentielle explicitement au programme...)

> Un sujet plutôt long (huit pages d'énoncé), globalement bien guidé, et balayant une large partie du programme, qui devrait permettre de classer efficacement les candidats.

3.2 EM LYON 2011 voie S

Cette année le sujet était composé d'un seul problème en 5 parties. Si on excepte la partie III qui utilise les résultats établis à la partie II, les parties du problème étaient largement indépendantes, avec pour dénominateur commun la fonction $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$

Partie I. La partie I étudie une somme de variables aléatoires à densité.

Les trois premières questions vérifient la connaissance du cours de probabilités. Les questions 4 et 5 sont des questions d'informatique concernant la simulation de lois et la recherche du plus grand entier vérifiant une condition donnée. Le premier programme est une question classique. Le deuxième demande plus de réflexion, notamment pour la traduction informatique de l'énoncé. Par ailleurs, l'existence de N_t n'étant pas garantie, l'énoncé aurait pu comporter une question préalable pour faire établir que N_t existe "presque sûrement". Signalons enfin qu'au lieu du terme "générateur aléatoire PASCAL" il aurait pu être préférable d'utiliser "générateur aléatoire random".

Globalement, la partie I était très abordable pour les élèves qui connaissent leur cours, et permettait aux candidats de bien rentrer dans le sujet.

Partie II. La partie II établit les propriétés d'une famille de polynômes. Elle porte exclusivement sur le programme de première année. Le candidat était suffisamment bien guidé pour ne pas rester bloqué dès le début, mais il ne suffisait pas non plus de recopier l'énoncé et il fallait être soigneux dans les calculs pour répondre correctement. Cette partie nous paraît assez classante.

Partie III. La partie III porte sur l'étude d'un produit scalaire. Les questions sont classiques : convergence d'une intégrale impropre (14), vérification d'un produit scalaire (15), réduction d'un endomorphisme symétrique (16 à 19). Mais le programme ne définissant les endomorphismes symétriques et les notions de vecteurs et valeurs propres qu'en dimension finie, les élèves ne pouvaient pas utiliser de théorèmes du cours pour établir la diagonalisabilité de T ou l'orthogonalité de ses vecteurs propres.

Les questions 20 à 25 étudient une base de vecteurs propres de la restriction T_N. Les vecteurs propres étant donnés par l'énoncé, ces questions vérifient principalement la bonne connaissance et l'application pertinente du cours.

Partie IV. La partie IV porte sur le programme d'analyse de première année : recherche d'équivalent, nature de suites et de séries. Signalons simplement que, dans la question 27, nous aurions préféré voir "développement asymptotique de a_n" plutôt que "développement limité". Le développement en question est délicat et son résultat était nécessaire pour faire la suite de la partie IV.

Partie V. Exemple intéressant et bien de fait de recherche d'extrema locaux, qui n'est ni basique ni totalement artificiel.

Dans les questions 32 et 34 il était nécessaire de faire des études de variations pour résoudre proprement les équations demandées. La question 34 est plus difficile et moins guidée que la plupart des questions précédentes. Les questions 33 et 35 demandaient également de la réflexion et de la précision dans la rédaction. La question 36 enfin est une question d'application du cours de deuxième année.

> Ce sujet balaie une grande partie du programme des deux années ; il ne présente pas de difficultés excessives mais comporte quelques questions suffisamment délicates pour être classant. Le sujet respecte parfaitement l'esprit du programme et favorise les élèves sérieux, ce qu'on ne peut qu'approuver.

3.3 HEC 2011 voie S

Le but du problème, non énoncé, est l'étude du lien entre la convergence d'une suite de matrices, réelles ou non, et le maximum des modules de ses valeurs propres. Il n'utilise que des connaissances de 1ère année, mais il s'agit des plus délicates : éléments propres et nombres complexes.
L'énoncé introduit le rayon spectral $\rho(A)$, maximum des modules des valeurs propres de A et $N(A)$, maximum des sommes des modules des coefficients de A. Mais le candidat n'a pas à prouver que ce dernier est une norme. Il n'y a donc pas d'algèbre bilinéaire avant la partie V. La convergence d'une suite complexe est définie par celle de ses modules et celle d'une suite de matrices par celle de ses coefficients.
Les questions sont numérotées de 1 à 19 et réparties en 5 parties.

Partie I : Deux exemples. Beaucoup de calculs dans ces deux questions : Seul $N(A^n)$ est donné, dans Q2. Ces exemples permettent aux candidats connaissant leur cours et sachant calculer de marquer des points, mais n'aident pas à résoudre la suite.

Partie II : Un critère de convergence vers la matrice nulle. Les étapes de cette partie et des suivantes sont courtes et les résultats successifs sont donnés, ce qui permet au candidat d'avancer, sans résoudre toutes les questions. Celui-ci doit néanmoins choisir parmi ces nombreux résultats celui qui lui permet de continuer.

Partie III : Matrices positives. Relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A. On prouve plusieurs inégalités. Pas de remarque à faire.

Partie IV : Matrices strictement positives. Q15 peut poser problème. En effet, On montre que A et ${}^tA$ ont même valeurs propres. Puis, alors que le vecteur propre X de A associé à λ, donné par l'énoncé, a ses coordonnées dans $\mathbb{C}$, on demande de montrer que le vecteur propre Z de ${}^tA$ associé à λ, a ses coordonnées toutes strictement positives ou toutes strictement négatives. L'énoncé ne précise pas que Z a ses coordonnées dans $\mathbb{R}$. Il s'agit là d'une erreur d'énoncé qui peut semer le doute chez les candidats. De plus Y et Z ne désignent pas les mêmes vecteurs que dans Q11 de la même partie : un autre choix de notations aurait été préférable.

Partie V : Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé. Les avis sont partagés sur la dernière question Q19. Certains estiment que l'algèbre linéaire est exclue du programme d'informatique. Il me semble que les résultats nécessaires à l'écriture de ces programmes sont dans l'énoncé et qu'un candidat maîtrisant l'informatique pouvait faire ses preuves ici.

Après les excès de ces dernières années, nous avons été surpris par ce texte d'algèbre pure, mais restant dans le cadre du programme. L'utilisation importante des nombres complexes a dû dérouter plus d'un candidat. On peut déplorer l'erreur d'énoncé en Q15. Ce problème semble très long, mais cela permet aux candidats de faire des choix, les nombreux résultats donnés par l'énoncé évitant la panne sèche.

3.4 EDHEC 2011 voie S

Au premier abord, ce sujet se compose, comme de coutume, de trois exercices et un problème portant sur les thèmes d'algèbre linéaire (exercice 1), les probabilités discrètes (exercice 2), l'algèbre bilinéaire (exercice 3) et les variables aléatoires à densité (plus de l'analyse dans le problème). Il couvre donc largement les programmes des deux années de préparation.

Exercice 1 : *Polynômes annulateurs, valeurs propres, décomposition en somme directe.*
Cet exercice est très théorique tout en étant constitué de questions très classiques au début (image incluse dans le noyau dans le cas d'une composée nulle), de difficulté graduée et se termine par une dernière question plus difficile donc discriminante. Il fait appel à un large registre de techniques et méthodes usuelles en algèbre linéaire.

Exercice 2 : *Lois de probabilités discrètes.*
L'expérience aléatoire décrite dans cet exercice est de facture usuelle, le résultat à établir en question **1a** aussi mais ce résultat n'est pas donné et sert tout au long de l'exercice. De plus, l'erreur de programmation dans la question suivante **2** peut rapidement semer le doute dans l'esprit des candidats qui font l'effort de répondre aux questions d'informatique bien que la réponse naturelle à la question saute aux yeux en principe. La seconde question d'informatique, en fin d'exercice, est tout aussi naïve.
La question **3b** laisse un peu planer le doute : doit-on se contenter de mentionner la loi de la variable aléatoire X_i (suggéré par la question **3a**) ou bien attend-on une démonstration rigoureuse et bien plus ardue, même s'il est fort peu probable que les étudiants se soient embarqués dans cette seconde voie ?

Exercice 3 : *Polynômes orthogonaux, orthonormalisation.*
L'exercice semble, à nouveau, partir sur des bases classiques mais on est surpris dès la première question par la non demande de vérification du produit scalaire. La question suivante introduit une notation (d°) sans la définir alors qu'elle n'est pas totalement usuelle. La formulation de la question **2b** est un peu troublante « P est un polynôme [...] orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur » : on a envie de lire inférieur à quoi ? La question **3**, originale de par sa présentation, est de difficulté plus importante et se termine par un peu de calcul. S'il est surprenant dans un premier temps de voir l'exemple traité après le cas général, on se dit que proposer l'exemple en premier aurait fait perdre une partie du raisonnement attendu. Les calculs demandés à la fin allongent de manière importante l'épreuve mais restent aisés à mener lorsque l'on maîtrise la fonction Γ.

Problème : *Variables aléatoires à densité, suites, équivalents et développements asymptotiques.*
Ce problème est constitué de deux parties. La première, portant exclusivement sur les variables aléatoires à densité, est extrêmement classique et assez courte tout en faisant bien le tour des fondamentaux de cette partie du programme (vérification d'une densité, loi du maximum, loi par transfert, convergence en loi). La seconde partie, basée davantage sur l'analyse du programme de première année, propose d'établir un développement asymptotique, notion hors programme mais annoncée comme si tout le monde la connaissait. Dès l'introduction, on est surpris de lire que φ est **la** densité de la loi normale centrée réduite. **La question 2 pose ensuite grandement problème : le symbole ϕ qui apparaît clairement comme une erreur pour tout enseignant ou tout connaisseur en LaTeX ne peut être distingué, par un étudiant lambda,**

du symbole Φ qui désigne alors pour lui la fonction de répartition et non plus une fonction de densité. Comme, en plus, cette question semble devoir se traiter indépendamment de la précédente, elle est doublement déroutante. Le reste du problème est très guidé.

Ce sujet est plus long que ceux des années précédentes, plus difficile aussi, mais les questions plus difficiles apparaissent toujours en fin d'exercice ou de partie de problème, donc l'ensemble aurait dû permettre de bien classer les candidats tout en leur permettant de s'exprimer de manière très honorable tant les questions classiques sont nombreuses, s'il n'y avait pas eu ces multiples erreurs dans les notations ainsi que dans les programmes informatiques. **Les étudiants, bons comme moins bons, méritants comme moins méritants ne peuvent qu'être grandement pénalisés (temps consacré à la question, remise en cause importante des calculs effectués) par cette erreur grossière de typographie, surtout lorsqu'on leur dit qu'après consultation du concepteur, le sujet est exempt d'erreur**.

3.5 CCIP 2011 voie S

Partie I. Dans une première question, on établit les propriétés de base des statistiques d'ordre Y_1,...,Y_n d'un n-échantillon i.i.d. d'une variable aléatoire à densité X : densité, moments.

Dans la suite, la loi de X est spécifiée. On peut alors expliciter certaines espérances $E(Y_k)$ et établir que la médiane empirique est, dans ce cas, un estimateur biaisé de la médiane théorique. On établit enfin le comportement asymptotique du maximum.

Cette partie est variée, elle permet de balayer un grand nombre de techniques standards liées aux variables à densité. Certaines questions sont très classiques, voire élémentaires. D'autres demandent une bonne maturité que ce soit dans les calculs, ou dans une réelle compréhension des notions du programme (comme par exemple le "Commenter" de la question 3.e). On apprécie qu'une représentation graphique soit demandée.

Partie II. Dans toute la suite du problème, X suit une loi normale d'espérance θ et de variance 1. La partie II étudie quelques propriétés de la moyenne et de la médiane empirique en tant qu'estimateurs de la valeur centrale θ. La question 5 est du cours. En 6.b, on aurait dû demander un intervalle de confiance centré en $\overline{X_n}$ *de marge d'erreur minimale* puisque le programme définit un intervalle de confiance au risque α comme un intervalle contenant le paramètre avec probabilité au moins $1-\alpha$. Mais la démarche est naturelle et cette question figure au programme.

En 6.c, il faut comprendre que l'intervalle de confiance est toujours centré en $\overline{X_n}$. Dans la question 7, il semble qu'il faille élargir l'avertissement liminaire de l'énoncé "la définition et les propriétés de la covariance ... de deux variables aléatoires discrètes s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité" à des variables aléatoires quelconques. Mais ceci est très naturel et n'aura probablement pas gêné les candidats.

L'ensemble de cette partie fait appel à des raisonnements moins usuels que la partie I mais n'est pas de difficulté excessive. Notons que l'énoncé est contraint d'admettre un résultat non trivial pour parvenir à ses fins.

Partie III. On introduit la transformation de Laplace pour préciser le comportement asymptotique de la médiane théorique. Une regrettable erreur dans l'introduction de cette partie a été corrigée en cours d'épreuve entre 10h30 et 11h30 suivant les établissements. Cela a pu créer une disparité importante entre les candidats, dans la mesure où cette erreur rendait alors très improbable la résolution des trois premières questions, relativement classiques. Dans l'ensemble cette partie est plus technique que les précédentes et comporte des questions difficiles. Deux résultats critiques sont admis.

On apprécie particulièrement cette année une partie I assez longue, centrée sur les variables aléatoires à densité, faisant appel à une large gamme de techniques tout à fait dans l'esprit du programme. Cette partie devrait contribuer efficacement à classer les candidats. Les deux parties suivantes, dans la tradition de cette épreuve, sont plus ambitieuses, la résolution de certaines questions demandant une très bonne maturité. On regrette :

- Une erreur d'énoncé au début de la partie 3 dont les candidats ont été avertis à des heures variables suivant les établissements.
- L'absence d'algorithme en Pascal. Répétons que cet enseignement ne peut survivre à terme que s'il vit dans les épreuves.

3.6 ESSEC 2011 voie S

Le sujet, dont l'objectif est très clairement énoncé dans l'introduction, cherche à comparer le commutant $\mathcal{C}(u)$ d'un endomorphisme u et $\mathbb{R}[u]$, l'ensemble des polynômes du même endomorphisme u. Le problème est constitué de cinq parties. Il couvre le programme d'algèbre linéaire et fait appel, dans une moindre mesure, aux cours sur les suites et les séries. La longueur de l'énoncé est raisonnable.

Partie I. La première partie, très courte, établit quelques résultats généraux. On démontre notamment que les sous-espaces propres de u sont stables par tout élément de $\mathcal{C}(u)$. Il s'agit de questions classiques qui permettent de mettre les candidats en confiance.

Partie II. Cette partie, la plus longue de l'énoncé, vise à démontrer que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$ dans un cas très particulier. On se place ici dans dans un espace vectoriel de dimension 3 constitué de séries entières de la forme $f : x \in]-1,1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 3. Il aurait été judicieux d'appeler $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: "suite associée à f".
La notation $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est employée sans être explicitée, mais cela n'a pas dû gêner les candidats.
À la question **8.c)**, on demande la matrice de l'endomorphisme u dans une certaine base. La réponse n'est pas fournie par l'énoncé, or il est nécessaire de connaître la matrice pour aborder la plupart des 9 questions suivantes. De nombreux candidats ont dû renoncer à ces questions, alors que certaines font appel à des raisonnements classiques.
De façon générale, cette partie est difficile en raison du niveau d'abstraction requis par la manipulation d'un endomorphisme sur un espace fonctionnel.

Partie III. À nouveau une partie très courte, dont le but est de montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties de E (E est un espace vectoriel réel de dimension finie). On peut regretter que l'énoncé ne rappelle pas la définition d'une homothétie.

Partie IV. On montre ici que dans le cas où u est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^n$, on a : $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes. Si le niveau reste ambitieux, cette partie est bien guidée et comporte plusieurs raisonnements classiques.

Partie V. u désignant toujours un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^n$, on montre que le centre de $\mathcal{C}(u)$ est $\mathbb{R}[u]$. Cette partie demande un bon esprit de synthèse, puisqu'elle fait appel à des résultats des parties précédentes, et de l'initiative. Elle est parfaitement adaptée à une fin de problème de l'ESSEC.

Bien qu'on puisse regretter que l'énoncé ne fournisse pas un résultat intermédiaire dans la partie II, et que le domaine des connaissances utilisées ne soit pas plus étendu par rapport au programme (notamment de 2ème année), l'épreuve de l'ESSEC 2011 est un sujet très intéressant et bien construit. Il est d'un niveau soutenu, mais adapté au public visé par l'ESSEC, et devrait permettre de trier les candidats.

4 Option Technologique

4.1 ECRICOME 2011 voie T

Cette épreuve comporte trois exercices indépendants.

Exercice 1. Le but de l'exercice est l'étude de la fonction $f = 2sh$, le tracé de sa courbe, puis l'étude de l'équation $f(x) = n$ où n est un entier naturel. Il fait intervenir les notions suivantes : parité, calcul de limites et de dérivées, sens de variation, branches infinies, tangentes, convexité et point d'inflexion, propriétés de la fonction exponentielle, théorème de la bijection et quelques propriétés sur les suites.

Exercice 2. L'exercice est constitué de deux parties indépendantes. La première partie propose le calcul de puissances n-ièmes de matrices : Δ^n, par diagonalisation, et A^n, à l'aide de la formule du binôme de Newton. La seconde partie propose d'étudier trois suites récurrentes imbriquées en utilisant des suites arithmétiques et géométriques.

Exercice 3. Cet exercice de probabilités est constitué de deux parties indépendantes. La première partie demande le calcul de plusieurs probabilités à l'aide de la formule des probabilités totales, de la formule des probabilités conditionnelles et de la formule de Bayes. Elle fait reconnaître deux lois binomiales, dont l'une est ensuite approximée par une loi normale et conduit à l'utilisation de la table de la loi normale centrée réduite. La deuxième partie considère une variable aléatoire M de densité f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$, étudie la convergence d'intégrales, la continuité de fonction, fait déterminer une fonction de répartition et calculer l'espérance de $Z = 1 + 0,2M$.

Commentaires

Exercice 1. Portant exclusivement sur le programme de première année, il permet de vérifier les connaissances usuelles sur les fonctions et les bases de l'analyse. Il est assez simple et doit rassurer le candidat sérieux en début d'épreuve.

La question 3 a) aurait dû être mieux formulée. "Étudier la convexité de f et démontrer en particulier que C admet un point d'inflexion." eût été préférable.

Exercice 2. Première partie très classique, avec des calculs relativement simples. Seconde partie, portant exclusivement sur le programme de première année, elle n'utilise que des résultats sur les suites arithmétiques et géométriques.

Bien que cela n'ait pas dû déconcerter ou pénaliser les candidats, il faut regretter l'absence de question faisant le lien entre les deux parties. On aurait pu demander de vérifier les résultats donnant les expressions de x_n, y_n et z_n en utilisant l'expression de A^n obtenue dans la partie I ou de trouver le lien entre ces deux parties mais le concepteur a peut-être voulu ne pas allonger le devoir, ce qui est très légitime.

On regrettera également une faute de frappe : suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en lieu et place de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la question 3(a) de la partie II.

Exercice 3. Première partie : Application directe du cours de première année en dehors de l'approximation, elle est assez rapide et sans difficulté. Deuxième partie : également une application directe du cours, elle aura récompensé les candidats qui ont travaillé ce sujet.

Aux réserves près sur la structure du deuxième exercice, il s'agit d'une épreuve très classique, de longueur raisonnable, entièrement conforme à l'intitulé et à l'esprit du programme, couvrant une bonne partie de celui-ci, qu'un élève sérieux, correctement préparé, peut traiter intégralement, et qui devrait permettre de départager les candidats.

4.2 ESCP EUROPE 2011 voie T

L'épreuve comportait, comme généralement ces dernières années, quatre exercices indépendants : un exercice d'algèbre linéaire (calcul matriciel), un exercice d'analyse, un exercice sur des probabilités discrètes et un exercice sur des variables aléatoire continues.

Exercice 1. L'exercice proposait d'effectuer quelques calculs sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Les questions **1** et **2.** formaient un exercice indépendant. Il en était de même des questions **4.**, d'une part, et **5**, d'autre part. La question **2.** demandait le calcul explicite de A^n $(n \in \mathbb{N}\ )$ par la formule du binôme de Newton. La question **3.** proposait deux polynômes de matrices, l'un d'eux étant égal à A, l'autre à A^{-1}. Le calcul de leur produit permettait d'inverser A. La question **4.** proposait un polynôme en la matrice A. Il fallait vérifier que ce polynôme est un polynôme annulateur de A, ce qui fournissait une autre manière de calculer A^{-1}.

Cet exercice, placé en première position, pouvait permettre aux élèves de niveau modeste de se rassurer en effectuant quelques calculs à la portée de tous. Peut-être est-il dommage que l'utilisation de la formule du binôme de Newton figure en deuxième question, plutôt qu'en dernière question. Les élèves qui mémorisent cette formule ne sont pas si nombreux ; il faut seulement espérer que celles et ceux qui ne la connaissent pas, ou la maîtrisent mal, auront su passer à la question **3.**, en comprenant que le reste du problème était indépendant de cette question.

Exercice 2. Il s'agissait d'un exercice très classique d'étude de suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Les candidats étaient guidés pas à pas, jusqu'à utiliser l'inégalité des accroissements finis. La seule difficulté est, en question **4.(d)** l'utilisation de la forme la moins usitée de cette inégalité des accroissements finis.

Dans le souci de guider les élèves, les concepteurs interdisent toute autonomie aux candidats. Par exemple, la croissance de f' $(f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2})$ sur $]0; +\infty[$ est immédiate, et ne nécessite pas le calcul de f''.

Exercice 3. Il s'agissait d'étudier une chaîne de Markov à 3 états et un "temps d'atteinte" en travaillant sur une matrice. Les concepteurs ont tenu à étudier, très rigoureusement, les "petites" valeurs de n pour éviter aux candidats, qui ne s'en seraient d'ailleurs pas aperçus, d'avoir à écrire des probabilités conditionnelles inexistantes telles que $P_{[X_0=0]}[X_1 = i]$. Ces louables soucis allongeaient cependant la rédaction.

En **3.,4.,5.,** il est implicitement admis, ce qui n'est pas illégitime, que T_1 et T_2 sont des variables aléatoires bien définies.

Exercice 4. L'exercice donnait une variable aléatoire X, qui suivait en fait une loi de Pareto. Il fallait montrer que cette variable aléatoire admet une espérance, qu'il fallait calculer, et n'admet pas de variance. Il fallait ensuite étudier deux variables aléatoires $Z = \sup(X_1, X_2)$ et $T = \inf(X_1, X_2)$, où X_1, X_2 étaient de même loi que X, et indépendantes. Il était demandé de déterminer une densité de Z, mais pas son espérance, et, en ce qui concerne T, une densité (Z suit aussi une loi de Pareto) et l'espérance. Effectuer le calcul de $E(Z)$ (qui n'est pas très long, et arrive en fin d'épreuve) aurait permis de vérifier que $E(Z) + E(T) = E(X_1) + E(X_2) = 2E(X)$.

L'épreuve proposait, comme usuellement ces dernières années, des exercices de niveaux variés et adaptés aux élèves issus de la Voie Technologique.
On peut juste, parfois, regretter que le souci de guider les élèves ne limite trop leur éventuelle autonomie, et, pour les meilleurs, ne fasse plus de ces exercices que des exercices de rédaction, celle-ci s'avérant du coup, longue. Peut-être serait-il possible de terminer les exercices par des questions un peu plus ouvertes.

4.3 ESC 2011 voie T

Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Calcul de la puissance n-ième d'une matrice à l'aide d'une diagonalisation et application à l'étude d'un processus aléatoire. Utilisation de la formule des probabilités totales.

Exercice 2. Étude de la fonction f définie par : $f(x) = 1 - \ln\left(x^2 - xe + e\right)$. Signe d'un polynôme du second degré, propriétés du logarithme. Convexité.

Exercice 3. Probabilités discrètes. Loi binomiale et ses propriétés ; espérance et variance d'une somme de variables aléatoires. Covariance. Indépendance de deux variables aléatoires.

Exercice 4. Variables aléatoires continues. Lois exponentielles. Etude d'une variable Z de densité h définie par $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Commentaires

L'exercice 1 est très classique.

L'exercice 2 utilisait un polynôme du second degré à coefficients irrationnels transcendants et a pu perturber des candidats, peu familiarisés avec ce genre de polynôme, y compris de bons candidats.

L'exercice 3, relativement court, est assez classique, il demandait cependant de bien interpréter chacune des variables X_1, $X_1 + X_2$ et X_3.

L'exercice 4 est classique également et est bien dans l'esprit du programme.

Mis à part les remarques faites pour l'exercice 2, le sujet est bien équilibré, de longueur et de difficultés raisonnables, mais demande un peu de réflexion. Il doit permettre à un candidat bien préparé de réussir convenablement.

La commission de Mathématiques de l'APHEC