Table des matières

Introduction 3

1 Objectifs généraux de la formation 3

2 Compétences développées 3

3 Architecture des programmes 3

Enseignement de mathématiques du premier semestre 5

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste 5
- 1 - Éléments de logique 5
- 2 - Raisonnement par récurrence et calcul de sommes et de produits 5
- 3 - Ensembles, applications 5
  - a) Ensembles, parties d'un ensemble 5
  - b) Applications 5

II - Nombres complexes et polynômes 6
- 1 - Nombres complexes 6
- 2 - Polynômes 6

III - Algèbre linéaire 6
- 1 - Calcul matriciel 6
  - a) Matrices rectangulaires 6
  - b) Cas des matrices carrées 7
- 2 - Systèmes linéaires 7
- 3 - Introduction aux espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels 7

IV - Suites de nombres réels 8
- 1 - Vocabulaire sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels 8
- 2 - Exemples de suites réelles 8
- 3 - Convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux 8

V - Fonctions réelles d'une variable réelle 9
- 1 - Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point 9
- 2 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle 9
- 3 - Dérivation 10
- 4 - Intégration sur un segment 10

VI - Probabilités sur un univers fini 11
- 1 - Généralités 11
  - a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements 11
  - b) Probabilité 11
  - c) Probabilité conditionnelle 11
  - d) Indépendance 12

2 - Variables aléatoires réelles 12
3 - Lois usuelles 12
4 - Compléments de combinatoire 13

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE **13**

I - Algèbre linéaire **13**
1 - Espaces vectoriels de dimension finie 13
2 - Compléments sur les espaces vectoriels 13
3 - Applications linéaires 14
a) Cas général 14
b) Cas de la dimension finie 14
c) Matrices et applications linéaires 14
d) Cas des endomorphismes et des matrices carrées 14

II - Compléments d'analyse **15**
1 - Étude asymptotique des suites 15
2 - Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point 15
3 - Séries numériques 15
4 - Intégrales sur un intervalle quelconque 16
5 - Dérivées successives 16
6 - Formules de Taylor 16
7 - Développements limités 17
8 - Extremum 17
9 - Fonctions convexes 17

III - Probabilités sur un univers quelconque **18**
1 - Espace probabilisé 18
2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles 19
3 - Variables aléatoires réelles discrètes 19
4 - Lois de variables discrètes usuelles 19
5 - Introduction aux variables aléatoires à densité 20
6 - Lois de variables à densité usuelles 20
7 - Convergences et approximations 20
a) Convergence en probabilité 20
b) Convergence en loi 21

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE **22**

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique **22**
1 - L'environnement logiciel 22
a) Constantes prédéfinies. Création de variables par affectation. 22
b) Constructions de vecteurs et de matrices numériques. 22
c) Opérations élémentaires 22
d) Fonctions usuelles prédéfinies 22
2 - Graphisme en deux dimensions 23
3 - Programmation d'algorithmes et de fonctions 23

II - Liste de savoir-faire exigibles en première année **23**

Introduction

1 Objectifs généraux de la formation

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable. L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours scolaire et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnements (équivalence, implication, raisonnement par l'absurde, par analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer à l'écrit et oral :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière ECS est celui de l'enseignement obligatoire de la classe de terminale scientifique. Le programme se situe dans le prolongement de ceux des classes de première et terminale de la filière S.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

La plupart des résultats mentionnés dans le programme seront démontrés. Pour certains marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du lycée, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants en classes de première et de terminale.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et la spécialité qu'ils auront choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités au lycée, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme s'organise autour de quatre points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordée, au premier semestre, par le biais du calcul : calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires. Des rudiments de vocabulaire général sur les espaces vectoriels sont introduits lors du premier semestre. Ce choix a pour ambition de familiariser les étudiants avec le calcul multidimensionnel afin de les préparer à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel, qui sera étudiée essentiellement au second semestre.

- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.

- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en classe de terminale. Le formalisme abstrait (axiomatique de Kolmogorov) donnera de nouveaux outils de modélisation de situations concrètes.
  On se place sur les espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre.
  En continuité avec les programmes du lycée, le concept de variable aléatoire à densité est présenté dès la première année sur des exemples simples, et permet de justifier l'introduction des intégrales généralisées en analyse, de même que l'étude des variables discrètes pour l'introduction aux séries.

- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse ou d'outils de calculs en algèbre linéaire.
  Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.
  L'enseignement informatique est commun à l'ensemble des filières des classes économiques. Le logiciel de référence choisi pour ce programme est Scilab.

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K}$ désigne exclusivement $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

1 - Éléments de logique

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques, mais tout exposé théorique est exclu. Les notions de ce paragraphe pourront être présentées en contexte au cours du semestre, évitant ainsi une présentation trop formelle.

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée. Quantificateurs : $\forall$, $\exists$.	On présentera des exemples de phrases mathématiques utilisant les connecteurs et les quantificateurs, et on expliquera comment écrire leurs négations.

2 - Raisonnement par récurrence et calcul de sommes et de produits

Emploi du raisonnement par récurrence.	Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.
Formules donnant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.	Exemple : formules donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.
Notations $\sum$, $\prod$. Définition de $n!$.	Les étudiants doivent savoir employer les notations $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in A} u_i$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^2$. ▶

3 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilité, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$.	
Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.	On pourra donner l'exemple de $\mathcal{P}(\{1,\dots,6\})$ afin de faciliter l'introduction de la notion de tribu.
Complémentaire. Notation $\overline{A}$.	La notation $\overline{A}$ est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation $\complement_E^A$.
Union, intersection. Notations $\bigcap$, $\bigcup$. Distributivité. Lois de Morgan.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.
Définition du produit cartésien d'ensembles.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition. Composée de deux applications.	
Restriction et prolongement d'une application.	Ces deux notions ne seront introduites que dans les cours d'algèbre linéaire et d'analyse.
Applications injectives, surjectives, bijectives.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - Nombres complexes et polynômes

1 - Nombres complexes

L'objectif de l'étude des nombres complexes est d'aboutir au théorème de d'Alembert-Gauss et à la factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$ de polynômes à coefficients réels. La construction de $\mathbf{C}$ est hors programme et les acquis de la classe de terminale seront complétés. On évitera toute manipulation trop technique faisant intervenir les nombres complexes. Les résultats concernant les racines n-èmes de l'unité ne sont pas exigibles des étudiants.

Notation algébrique d'un nombre complexe, partie réelle et partie imaginaire. Conjugué d'un nombre complexe.	On donnera l'interprétation géométrique d'un nombre complexe.
Notation exponentielle. Module, argument. Formules d'Euler et de Moivre.	Brève révision de la trigonométrie. Formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. Les racines n-èmes de l'unité pourront être étudiées comme exemples d'utilisation de la notation exponentielle.

2 - Polynômes

La construction des polynômes formels n'est pas au programme, on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales.

Ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$.	
Opérations algébriques, degré.	Par convention $\deg(0) = -\infty$
Ensembles $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ de degré au plus n.	
Division euclidienne.	Multiples et diviseurs. $\boxed{\blacktriangleright}$
Racines, ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité par factorisation d'une puissance de $(X-a)$	Cas du trinôme. $\boxed{\blacktriangleright}$
Théorème de d'Alembert-Gauss.	Résultat admis. Exemples simples de factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$. Les méthodes devront être indiquées.

III - Algèbre linéaire

L'objet de ce chapitre est de mettre en place l'outil vectoriel dès le premier semestre, afin de confronter rapidement les étudiants aux notions étudiées dans le cours d'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, on présentera la notion de matrices et l'on familiarisera les étudiants à la manipulation de ces objets avant d'en aborder les aspects vectoriels.

L'étude de ce chapitre pourra être menée en lien avec l'algorithmique en ce qui concerne le calcul matriciel. $\boxed{\blacktriangleright}$

1 - Calcul matriciel

a) Matrices rectangulaires

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$.	
Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.	Addition, multiplication par un scalaire. $\boxed{\blacktriangleright}$
Produit matriciel.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$

Transposée d'une matrice.
Transposition d'un produit.

Notation ${}^tA$.

b) Cas des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.

Matrices inversibles, inverse d'une matrice.
Ensemble $GL_n(\mathbf{K})$.

On admettra que pour une matrice carrée, un inverse à gauche ou à droite est l'inverse.

Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.

Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.

2 - Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.
Écriture matricielle d'un système linéaire.

Système homogène. Système de Cramer.

Résolution par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples.
On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes :
$L_i \leftarrow L_i + aL_j$ avec $i \neq j$, $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$, $L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ $(a \neq 0, i \neq j)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

Inversibilité des matrices triangulaires, diagonales.

3 - Introduction aux espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Cette première approche des espaces vectoriels permet d'introduire le vocabulaire et sera accompagnée de nombreux exemples.

Il sera possible, à l'occasion d'autres chapitres en analyse ou probabilité, de rappeler la structure d'espace vectoriel des ensembles les plus courants, afin de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et les notions fondamentales, avant une étude plus approfondie des espaces vectoriels au second semestre.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. *Les notions de corps, d'algèbre et de groupe sont hors programme.*

Structure d'espace vectoriel.
Sous-espaces vectoriels.

Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbf{K}^n$, espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions).

Combinaisons linéaires.
Sous-espace engendré.

On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.
Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de cette famille est n.

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.

On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini.
Exemple de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

IV - **Suites de nombres réels**

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants dès le premier semestre avec des méthodes d'analyse. La construction de **R** *est hors programme et le théorème de la borne supérieure est admis.*

1 - Vocabulaire sur l'ensemble R des nombres réels

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	
Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de **R**.	Quand il existe, le maximum de A coincide avec la borne supérieure de A.
Théorème de la borne supérieure.	Résultat admis.
Partie entière d'un réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(.)$ est réservée à l'espérance mathématique.

2 - Exemples de suites réelles

Suites arithmético-géométriques.	On se ramenera au cas d'une suite géométrique.
Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique.	Cette partie pourra être l'occasion d'illustrer, dans un cas concret, les notions de famille libre, génératrice et de base. Dans le cas de racines complexes conjuguées (notées ρ et $\overline{\rho}$), on pourra introduire les suites $(Re(\rho^n))$ et $(Im(\rho^n))$. $\boxed{\blacktriangleright}$

3 - Convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux

Limite d'une suite, suites convergentes.	On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.
Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.	
Unicité de la limite. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Suites monotones, croissantes, décroissantes, suites adjacentes.	
Théorème de limite monotone	Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite. Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$)
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.	
Rappel des croissances comparées.	Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

V - Fonctions réelles d'une variable réelle

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$. *Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*

L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration n'est exigible des étudiants.

1 - Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point

Définition de la limite et de la continuité d'une fonction d'une variable en un point. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche. Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.	On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$; ainsi, lorsque x_0 appartient à I, f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.
Opérations algébriques sur les limites. Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement.	
Prolongement par continuité en un point.	
Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Limite d'une fonction composée.	La caractérisation séquentielle de la limite n'est pas au programme.

2 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

Fonctions paires, impaires, périodiques. Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.	
Théorème de limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition.	
Fonction continue par morceaux.	Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$. On exclut toute étude approfondie des fonctions continues par morceaux.
Théorème des valeurs intermédiaires.	
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$

Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation. On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. $\boxed{\blacktriangleright}$
Représentation graphique de la fonction réciproque.	

3 - Dérivation

Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point.	Interprétation graphique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.	
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. Dérivée d'un polynôme.	Notation f'.
Dérivation des fonctions réciproques.	
Théorème de Rolle.	
Égalité et inégalités des accroissements finis.	• Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$ • Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ alors $\lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu. $\boxed{\blacktriangleright}$
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.	Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Définition et dérivation de la fonction Arctan.	L'étude de cette fonction se limitera strictement à ces deux points.

4 - Intégration sur un segment

La construction de l'intégrale de Riemann est hors programme. On se limitera dans un premier temps à l'intégrale des fonctions continues.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.	Résultat admis.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Relation de Chasles.	Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$ où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle.	
Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance. Cas d'une fonction continue, positive sur $[a, b]$ et d'intégrale nulle.	Si f est continue sur $[a, b]$ et $a \leqslant b$, $$\left\lvert \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert \mathrm{d}t.$$
Intégration par parties.	

Changement de variable.

Les changements de variable non affines devront être indiqués aux candidats.

Sommes de Riemann à pas constant.

La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Interprétation de l'intégrale en termes d'aire. ▶

VI - Probabilités sur un univers fini

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.

Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en ne faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

1 - Généralités

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire.
Univers Ω des résultats observables, événements.

On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples.

Opérations sur les événements, événements incompatibles.

On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.

Système complet d'événements fini.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes :
- $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$

b) Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$

Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P vérifiant $P(\Omega) = 1$.
Cas de l'équiprobabilité.

Notion d'espace probabilisé.

Lors du premier semestre, on se restreindra à la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.

Notation P_A. P_A est une probabilité. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_A)$ est un espace probabilisé.

Formule des probabilités composées.

- Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.
- Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet fini, alors pour tout événement B on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i).$$

Formule de Bayes.

On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

d) Indépendance

Indépendance de deux événements.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Indépendance mutuelle de n événements.
Si n événements A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

2 - Variables aléatoires réelles

On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Les variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration des formules.

Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.

On adoptera les notations habituelles telles que $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.

Système complet associé à une variable aléatoire.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

$F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.

Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$.

On se limitera à des cas simples, tels que
$g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...

Espérance d'une variable aléatoire.

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Théorème de transfert.

$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$.

$E(aX + b) = aE(X) + b$.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire.
Cas particulier où $V(X) = 0$.

Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Calcul de la variance.
$V(aX + b) = a^2V(X)$

Formule de Koenig-Huygens :
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Variables centrées, centrées réduites.

Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

3 - Lois usuelles

Variable aléatoire certaine.

Loi de Bernoulli, espérance et variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Variable indicatrice d'un événement. Notation $\mathbf{1}_A$.

Loi binomiale.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$.
Formule du triangle de Pascal.

En lien avec le programme de terminale, le nombre $\binom{n}{p}$ sera introduit comme le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. ▶

Formules $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Formule du binôme de Newton donnant $(a + b)^n$.

Lorsque a et b sont strictement positifs, on pourra faire le lien avec la loi $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$. ▶

Espérance et variance d'une variable de loi binomiale.

Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, espérance, variance.

Application, à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. $\boxed{\blacktriangleright}$

4 - Compléments de combinatoire

Dénombrement des ensembles suivants :
- parties d'un ensemble à n éléments ;
- parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ;
- p-listes d'un ensemble à n éléments ;
- p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments ;
- permutations d'un ensemble à n éléments.

On fera le lien entre les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.
On pourra utiliser la représentation arborescente d'un ensemble de p-listes dans les problèmes de dénombrement.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - Algèbre linéaire

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir et compléter les notions vues au premier semestre.

1 - Espaces vectoriels de dimension finie

Espaces admettant une famille génératrice finie.
Existence de bases.
Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.

Dimension d'un espace vectoriel.

Notation $\dim(E)$.

Caractérisation des bases.

Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.

Rang d'une famille finie de vecteurs.
Théorème de la base incomplète.

Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

2 - Compléments sur les espaces vectoriels

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.
Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
Somme et somme directe de k sous-espaces vectoriels.
Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.

Dimension d'une somme de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dimension d'un supplémentaire.

Si F et G sont supplémentaires,
$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$
Caractérisation de $E = F \oplus G$ par la dimension et l'intersection de F et G.

Dimension d'une somme directe de k espaces vectoriels.

Base adaptée à une somme directe.

Concaténation de bases de sous espaces vectoriels.

Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases.

3 - Applications linéaires

a) Cas général

Définition d'une application linéaire de E dans F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.	
Composée de deux applications linéaires. Isomorphismes	Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.
Endomorphismes, espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.	Puissances d'un endomorphisme.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Projecteurs associés à deux espaces supplémentaires.	Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

b) Cas de la dimension finie

Rang d'une application linéaire.	Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Lien entre recherche de l'image et résolution de système. $\boxed{\blacktriangleright}$
Formule du rang.	Si E et F sont des espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\ u) + \dim(\mathrm{Im}\ u)$ Application à la caractérisation des isomorphismes.
Formes linéaires et hyperplans.	

c) Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases.	Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$. Matrices lignes et formes linéaires.
Vecteur colonne des coordonnées dans une base $\mathcal{B}_E$. Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Lien du produit matriciel avec la composition des applications linéaires.	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Rang d'une matrice.	Égalité des rangs d'une application linéaire et de sa matrice dans des bases.
Une matrice et sa transposée ont même rang.	Résultat admis.

d) Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.	Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Formule du binôme pour deux endomorphismes ou deux matrices carrées qui commutent.	
Automorphismes. Ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E.	
Matrices inversibles, inverse d'une matrice. Ensemble $GL_n(\mathbf{K})$.	Lien avec les isomorphismes et avec $GL(E)$.
Lien entre les isomorphismes de E et les matrices inversibles.	On pourra démontrer que pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'inverse à gauche est également un inverse à droite

Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Polynôme annulateur.

Exemples de calcul d'automorphismes réciproques, d'inverses de matrices et de puissances k-ème d'une matrice par utilisation d'un polynôme annulateur.
Toute théorie générale sur les polynômes annulateurs est exclue.

II - Compléments d'analyse

1 - Étude asymptotique des suites

Suite négligeable.

Notation $u_n = o(v_n)$.
On présentera à nouveau les croissances comparées rappelées au premier semestre.

Suites équivalentes.

Notation $u_n \sim v_n$.
$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.

Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.

2 - Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point

Fonction négligeable au voisinage de x_0.

Notation $f = o(g)$.

Fonctions équivalentes au voisinage de x_0.

Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$.
$f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$.

Extension au cas $x_0 = \pm\infty$.

Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.

Comparaison des fonctions exponentielles, puissances et logarithmes au voisinage de l'infini, des fonctions puissances et logarithmes en 0.

On présentera à nouveau les croissances comparées rappelées au premier semestre.

3 - Séries numériques

Série de terme général u_n.
Sommes partielles associées.

On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n). ▶

Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.

Combinaison linéaire de séries convergentes.

Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \sim v_n$.
Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.

Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Convergence des séries de Riemann.

Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.

Série exponentielle.

$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ce résultat pourra être démontré à l'aide de la formule de Taylor. ▶

4 - Intégrales sur un intervalle quelconque

Intégration sur un intervalle semi-ouvert.
Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.

On dira que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et est finie.
On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \mapsto b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités.
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a, b[$ et d'intégrale nulle.

Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) seront pratiquées sur des intégrales sur un segment.

Cas des fonctions positives.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Théorèmes de convergence dans les cas où $f \leqslant g$ et $f \underset{b}{\sim} g$ avec f et g positives au voisinage de b.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.

Théorèmes de convergence dans le cas $f = o(g)$ avec g positive au voisinage de b.
Extension des notions précédentes aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Brève extension aux fonctions définies et continues sur $]a_1, a_2[\cup]a_2, a_3[\cup \cdots \cup]a_{p-1}, a_p[$.

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

5 - Dérivées successives

Fonction p fois dérivable en un point.

Notation $f^{(p)}$.

Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle. Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.

La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

6 - Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Ces formules seront données à l'ordre n pour une fonction de classe C^{n+1}.

Application à la caractérisation de la multiplicité d'une racine a d'un polynôme P par l'étude des dérivées $P^{(k)}(a)$.

7 - Développements limités

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme.

Définition.	On fera le lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée.
Somme et produit de développements limités.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^n. Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus).	Résultat admis.

8 - Extremum

Pour préparer l'introduction des notions de topologie du programme de deuxième année, on insistera sur la différence entre la recherche d'extremum sur un segment et la recherche d'extremum sur un intervalle ouvert.

Toute fonction continue sur un segment admet des extrema globaux sur ce segment.	
Dans le cas d'une fonction de classe C^1 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un intervalle ouvert. Définition d'un point critique.	On pourra montrer que le résultat tombe en défaut lorsque l'intervalle de définition n'est pas ouvert.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert.	Ce résultat sera démontré grâce au développement limité à l'ordre 2.

9 - Fonctions convexes

Tous les résultats de cette section seront admis.

Définition des fonctions convexes, fonctions concaves. Point d'inflexion.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$ Interprétation géométrique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Généralisation de l'inégalité de convexité.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1.	Les étudiants devront savoir que si f est de classe C^1, alors f est convexe si et seulement si l'une des deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • C_f est au-dessus des tangentes.
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2.	

III - Probabilités sur un univers quelconque

Dans ce second temps de l'étude des probabilités, le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire " espace probabilisé " et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur ce cadre. L'étude des variables aléatoires et notamment celles des lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. $\boxed{\blacktriangleright}$

1 - Espace probabilisé

Tribu d'événements ou σ-algèbre d'événements.

Notation $\mathcal{A}$.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.

On pourra donner quelques exemples significatifs d'événements de la forme :
$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$
On fera le lien avec le cas des univers finis en expliquant que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.
On pourra introduire différentes tribus sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et montrer que le choix de la tribu dépend de l'expérience que l'on cherche à modéliser.

Une probabilité est une application σ-additive P définie sur la tribu $\mathcal{A}$ telle que $P(\Omega) = 1$.

Tribu engendrée par un système complet d'événements.

Existence admise.

Notion d'espace probabilisé

Notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Propriétés vraies presque sûrement.

Propriétés de limite monotone.

- Pour toute suite croissante (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$
- Pour toute suite décroissante (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

On déduira de la propriété de limite monotone que pour toute suite (A_n) d'événements,
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$
$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$
On pourra donner un exemple d'ensemble négligeable non vide, comme l'obtention d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.

Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.

Si A vérifie $P(A) \neq 0$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

Généralisation de la formule des probabilités composées.

Généralisation de la formule des probabilités totales.

Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles

Définition.	Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout réel x, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$ est dans la tribu $\mathcal{A}$. On adoptera les notations habituelles $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc. On pourra, à l'aide d'exemples, illustrer comment obtenir des événements du type $[X = x]$ ou $[a \leqslant X < b]$ à partir d'événements du type $[X \leqslant x]$.
Fonction de répartion d'une variable réelle.	$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x)$.
Propriétés.	F_X est croissante et continue à droite en tout point, $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$.
Loi d'une variable aléatoire.	La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire. Résultat admis.

3 - Variables aléatoires réelles discrètes

On commencera cette section en expliquant comment les résultats vus précédemment se prolongent dans le cadre général et l'on insistera sur les problèmes de convergence de séries que l'on rencontre lors de l'étude de variables aléatoires infinies.

Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Tribu engendrée par une variable aléatoire discrète.	La tribu $\mathcal{A}_X$ des événements liés à X est la tribu engendrée par le système complet $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. Cette tribu est aussi appelée tribu engendrée par la variable aléatoire X et constitue l'information apportée par X.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	
Espérance d'une variable aléatoire.	Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente.
Théorème de transfert (admis).	Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ est absolument convergente, et alors $E(g(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$.
$E(aX + b) = aE(X) + b$.	
Moment d'ordre r ($r \in \mathbf{N}$).	Notation $m_r(X) = E(X^r)$.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
Cas particulier où $V(X) = 0$.	
Variables centrées, centrées réduites.	Notation X^* pour la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 - Lois de variables discrètes usuelles

Lois discrètes usuelles à valeurs dans un ensemble fini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On généralisera les lois $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{U}([\![a,b]\!])$ vues lors du premier semestre. $\boxed{\blacktriangleright}$

Loi géométrique (temps d'attente d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance et variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout nombre entier naturel non nul k,

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Loi de Poisson : définition, espérance, variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

5 - Introduction aux variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité.

On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.

Toute fonction f_X à valeurs positives, qui éventuellement ne diffère de F_X' qu'en un nombre fini de points, est une densité de X.

Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$.

Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X.

Toute fonction f positive, continue sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire.

Résultat admis.

Transformation affine d'une variable à densité.

Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et la densité de $aX + b$ $(a \neq 0)$.

Espérance d'une variable à densité.
Variables aléatoires centrées.

Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale.
Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.

$E(aX + b) = aE(X) + b$.

6 - Lois de variables à densité usuelles

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. $\boxed{\blacktriangleright}$

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \iff Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$$

Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff Y = \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad (\lambda > 0)$$

Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ avec } \sigma > 0$$

On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

7 - Convergences et approximations

a) Convergence en probabilité

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes.

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$:
$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}$$
Pour toute variable X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$:
$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Convergence en probabilité : si (X_n) et X sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, (X_n) converge en probabilité vers X si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P([|X_n - X| > \varepsilon]) = 0$.

Notation $X_n \xrightarrow{P} X$.

Loi faible des grands nombres pour la loi binomiale.

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $(\frac{1}{n}X_n)$ converge en probabilité vers p. $\boxed{\blacktriangleright}$
La loi faible des grands nombres permet une justification partielle, a posteriori, de la notion de probabilité d'un événement, introduite intuitivement.

b) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires vers X.

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Cas où les X_n et X sont à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Si (np_n) tend vers un réel strictement positif λ, convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ vers une variable suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Théorème limite central pour la loi binomiale et pour la loi de Poisson.

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (respectivement $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$), alors la suite de variables aléatoires centrées réduites (X_n^*) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Théorème admis. $\boxed{\blacktriangleright}$

Enseignement annuel d'informatique et algorithmique

I - Éléments d'informatique et d'algorithmique

L'objectif est d'initier les étudiants à l'algorithmique et à l'utilisation de l'informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.
Le logiciel retenu pour la programmation dans ce programme des classes économiques et commerciales est Scilab. L'utilisation du logiciel se fait en continuité avec le cours de mathématiques et sera suivi d'une mise en œuvre sur ordinateur. Seules les notions de Scilab indiquées dans le programme sont exigibles.

1 - L'environnement logiciel

a) Constantes prédéfinies. Création de variables par affectation.

`%pi %e`
Affectation : `nom = expression`
L'expression peut être du type numérique, matricielle ou du type chaîne de caractères.

Approximations de π et e.
`//` permet de commenter une commande.

b) Constructions de vecteurs et de matrices numériques.

Vecteurs lignes : `[ , ,..., ]`
Vecteurs colonnes : `[ ; ;...; ]`
Matrices $n \times p$: `[ ,..., ;...; ,..., ]`

c) Opérations élémentaires

Opérations arithmétiques :

+	-	*	/	^

Comparaisons - tests :

==	>	<	>=	<=	<>

Logiques

&	|
and	or

Les opérations arithmétiques de base s'appliquent aux variables numériques ou matricielles.

d) Fonctions usuelles prédéfinies

Fonctions numériques usuelles :
`log, exp, floor, abs, sqrt, sin, cos`

Toutes ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou à des matrices élément par élément.

Fonctions `rand`

La fonction `grand` pourra être utilisée avec les paramètres correspondant aux lois de probabilité présentes dans le programme.

Fonctions matricielles : `rank(A), inv(A), A'`

Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
On pourra utiliser les fonctions `size(A), find` dans le cadre de simulations.
Pratique des opérations et des fonctions matricielles dans des situations concrètes.

2 - Graphisme en deux dimensions

Courbes représentatives de fonctions usuelles, de densités et de fonctions de répartition.
Tracé d'histogrammes.

On pourra utiliser les fonctions `plot, plot2d, bar, histplot`, la fonction `linspace(a,b,n)` et l'opération $\boxed{\texttt{./}}$

3 - Programmation d'algorithmes et de fonctions

Les structures suivantes seront utilisées :

Structure conditionnelle :
```
if ...then ...end
if ...then ...else ...end
```

Structures répétitives :
```
for k=...: :...end
while ...then ...end
```

Exemples : $n!$, $\binom{n}{p}$.

Fonctions - arguments - retour de résultats.

Notion de variables locales et globales. Par défaut, les variables créées dans une fonction sont locales.

Fonction d'entrée des données `input()`.
Fonction de sortie de résultat(s) `disp()`.

Saisie au clavier - message indicatif possible.
Affichage du contenu d'une variable à l'écran avec commentaire éventuel.

II - Liste de savoir-faire exigibles en première année

Calcul des termes d'une suite.

Exploitation graphique des résultats.

Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.

On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique.
La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).

Calcul des valeurs approchées d'une intégrale par la méthode des rectangles.

Application au calcul de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Utilisation de la fonction `rand` pour simuler des expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.

Loi binomiale, loi géométrique.

Simulation de phénomènes aléatoires.

Utilisation de la fonction `grand`. On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ (n grand) avec la loi de Poisson.
On pourra utiliser une simulation pour comparer expérimentalement une loi binomiale avec une loi normale.

Résolution de systèmes $AX = B$.