DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

HEC PARIS

CONCOURS D'ADMISSION 2012

SUR CLASSES PREPARATOIRES ECONOMIQUES ET COMMERCIALES ET CLASSES PREPARATOIRES LITTERAIRES

RAPPORTS DES EPREUVES ORALES

B.P 31 – 78354 JOUY-EN-JOSAS CEDEX – FRANCE
WWW. CONCOURS-BCE.COM

SOMMAIRE

****
****
****

STATISTIQUES DES EPREUVES ORALES HEC PARIS 2012

Epreuve	Option	Scientifique – Candidats	Scientifique – Moyenne	Economique - Candidats	Economique - Moyenne	Technologique - Candidats	Technologique Moyenne	A/L - Candidats	A/L - Moyenne	B/L - Candidats	B/L - Moyenne	Moyenne	Ecart-type	Note minimale	Note maximale	Présents
Culture et sciences humaines		440	8,72	173	8,92	17	4,94	46	11,29	14	12,89	8,93	3,72	1,0	19,0	690
Entretien triptyque		440	11,36	173	11,38	17	10,59	45	11,42	14	13,75	11,40	2,50	3,0	19,0	689
Histoire-géographie		440	9,89	0		0		0		0		9,89	4,16	1,0	20,0	440
Analyse économique et historique		0		173	12,06	0		0		0		12,06	2,46	7,0	19,5	173
Economie		0		0		17	11,00	0		0		11,00	4,18	5,0	18,0	17
Histoire ou géographie littéraire		0		0		0		46	12,22	14	11,07	11,95	4,15	3,0	20,0	60
Mathématiques (S)		441	11,32	0		0		0		0		11,32	3,72	3,0	20,0	441
Mathématiques (E)		0		173	9,77	0		0		0		9,77	3,85	3,0	19,0	173
Mathématiques (T)		0		0		17	12,59	0		0		12,59	4,09	6,0	20,0	17
Mathématiques B/L		0		0		0		0		14	10,71	10,71	4,53	5,0	17,0	14
Aptitude logique		0		0		0		46	10,93	0		10,93	4,12	4,0	20,0	46
Langue vivante I		**441**	**12,00**	**173**	**11,64**	**17**	**12,12**	**45**	**14,11**	**14**	**11,93**	**12,05**	**3,73**	**1,0**	**20,0**	**690**
Langue vivante I	Anglais	346	11,74	140	10,98	8	8,38	23	12,91	11	11,27	11,53	3,49	1,0	20,0	528
Langue vivante I	Allemand	52	11,59	18	14,42	0		6	12,33	1	12,00	12,31	3,69	5,0	20,0	77
Langue vivante I	Espagnol	29	13,38	11	13,36	0		4	14,25	0		13,45	4,16	5,0	20,0	44
Langue vivante I	Italien	2	19,50	1	20,00	0		1	19,50	0		19,63	0,48	19,0	20,0	4
Langue vivante I	Latin	0		0		0		10	17,50	2	15,50	17,17	2,98	10,0	20,0	12
Langue vivante I	Russe	0		0		1	18,00	1	12,50	0		15,25	3,89	12,5	18,0	2
Langue vivante I	Arabe littéral	12	16,54	3	17,00	8	15,13	0		0		16,11	1,99	12,5	19,5	23
Langue vivante II		**442**	**13,46**	**173**	**13,38**	**17**	**12,68**	**46**	**11,59**	**14**	**12,75**	**13,28**	**3,03**	**5,0**	**20,0**	**692**
Langue vivante II	Anglais	96	11,96	33	12,42	9	13,11	22	9,86	3	10,00	11,80	2,67	5,0	18,0	163
Langue vivante II	Allemand	115	13,01	32	12,39	1	7,50	4	10,63	3	14,50	12,81	3,31	6,0	20,0	155
Langue vivante II	Espagnol	200	13,94	101	13,84	7	12,86	11	12,32	4	13,13	13,82	2,65	7,0	20,0	323
Langue vivante II	Italien	15	16,33	5	16,00	0		0		2	10,75	15,75	3,51	9,0	20,0	22
Langue vivante II	Latin	0		0		0		9	15,33	2	15,50	15,36	1,36	14,0	18,0	11
Langue vivante II	Russe	4	14,88	2	15,25	0		0		0		15,00	1,73	12,5	17,0	6
Langue vivante II	Chinois	7	17,00	0		0		0		0		17,00	1,00	16,0	18,0	7
Langue vivante II	Hébreu	1	19,00	0		0		0		0		19,00	0,00	19,0	19,0	1
Langue vivante II	Japonais	1	17,00	0		0		0		0		17,00	0,00	17,0	17,0	1
Langue vivante II	Polonais	1	19,00	0		0		0		0		19,00	0,00	19,0	19,0	1
Langue vivante II	Arabe littéral	2	18,75	0		0		0		0		18,75	1,06	18,0	19,5	2
TOTAL		**2644**	**11,13**	**1038**	**11,19**	**102**	**10,65**	**274**	**11,92**	**84**	**12,18**	**11,20**	**3,74**	**1,0**	**20,0**	**4142**

ANALYSE ECONOMIQUE ET HISTORIQUE DES SOCIETES CONTEMPORAINES (option économique)

Les conditions de l'épreuve orale ont évolué cette année. L'étudiant dispose certes toujours du même temps de préparation, il dispose toujours d'une dizaine de minutes pour traiter le sujet devant les deux membres du jury et l'exposé est suivi d'une discussion d'une dizaine de minutes elle aussi. Par contre l'étudiant n'a plus le choix entre deux sujets comme par la passé. Dorénavant un premier candidat tire un sujet et les deux suivant traitent le même sujet. Il s'agit ainsi de permettre au jury de comparer plus facilement les candidats.

Devant le jury et le public le candidat a environ dix minutes pour traiter le sujet. Un plan structuré autour de deux parties et deux sous-parties est proposé par les candidats dans la quasi-totalité des cas. A la suite de cette présentation une discussion d'environ une dizaine de minutes s'engage avec le jury autour de ce sujet avec la possibilité que la discussion glisse vers d'autres points du programme à la faveur des éléments développés par le candidat.

Les candidats sont évalués sur l'aptitude à analyser des problèmes économiques et sociaux auxquels sont confrontées les sociétés contemporaines. Ils doivent aborder le sujet en faisant preuve d'un esprit scientifique c'est-à-dire en s'appuyant sur des connaissances précises et en mobilisant les outils de l'analyse économique (modèles…) et de l'analyse historique.

<u>Exemples de sujets</u> :

Les enjeux économiques des dettes souveraines en Europe

Changes fixes ou changes flottants

La progressivité de l'impôt

Les déterminants des taux de change

Inflation et dette publique

L'impôt sur la consommation

Crises économiques et politiques commerciales

Les rivalités économiques entre grands pays avant 1914

ECONOMIE (option technologique)

<u>Exemples de sujets</u> :

Faut- il encadrer les prix de l'immobilier ?

Le rôle des innovations dans la croissance économique

Le déficit commercial français

Mondialisation et bien être

La règle d'or : mythe ou réalité

L'avenir de la protection sociale en France

Les frontières ont-elles disparu ?

APTITUDE LOGIQUE (options littéraires A/L et Lyon)

Le concours 2012 inaugurait la nouvelle procédure d'interrogation de l'épreuve d'aptitude logique qui concerne les candidats admissibles issus des options littéraires A/L et Lyon.

Cette première expérience a permis de préciser et d'affiner le contenu du programme actuel.
L'interrogation d'aptitude logique est précédée d'une préparation de 30 minutes durant laquelle le candidat prend connaissance d'un **sujet principal** pouvant s'appuyer sur un texte contemporain ou non posant explicitement ou implicitement un problème logique et qui s'accompagne de plusieurs questions de nature quantitative. L'interrogation d'une durée de 30 minutes, de déroule face à deux examinateurs et comprend deux parties.

Dans une **première partie** d'une durée de 20 minutes environ, le candidat produit un bref exposé (6 à 8 minutes) dans lequel il dégage et analyse les différentes problématiques soulevées par le texte, puis répond aux questions qui accompagnent le texte ainsi qu'à d'autres questions posées par le jury. Celles-ci, plus ou moins directement liées au texte, sont destinées à tester les capacités à raisonner avec rigueur et à effectuer des calculs simples sans calculatrice (comparaison de diverses grandeurs, cohérence des hypothèses formulées et interprétation des conclusions).

La **seconde partie** d'une durée de 10 minutes environ, consiste en la résolution d'un petit exercice pratique, sans préparation, à l'aide de techniques élémentaires, interpréter les résultats obtenus et en vérifier la cohérence.
Aucune connaissance scientifique ou mathématique dépassant le niveau de l'enseignement secondaire n'est requise. Seules sont nécessaires l'aptitude logique y compris sous son aspect critique, et la capacité à poser convenablement un problème et mettre en œuvre des enchaînements logiques permettant de mener des calculs numériques simples.
Les sujets proposés cette année étaient d'auteurs très divers dans le temps tels que Charpentier (Rennes I), Laplace, Poisson et Condorcet et les thèmes abordés étaient de nature démographique (recensement), politique (paradoxe de Condorcet) ou économico-statistique (rôle des actuaires dans l'établissement de tables de mortalité).

Remarques

Le jury précise aux futurs candidats qu'il apprécie particulièrement les exposés s'appuyant sur un plan, une articulation cohérente de l'argumentation ainsi qu'un langage fluide et concis, et que tout exposé consistant en une lecture du texte ou une paraphrase ligne à ligne est fortement sanctionné.
Cette année, le jury a pu constater chez nombre de candidats des insuffisances importantes :

- Une réticence ou de grandes difficultés à fixer des notations pour résoudre un problème qui nécessite un calcul (le choix des notations fournit souvent un pronostic fiable de succès ou d'insuccès pour l'exercice concerné) ;

- une très grande maladresse voire une incapacité à effectuer un calcul simple, de tête ou à la main (pour certains, plus rien n'est simple : pour évaluer 18/10, ils simplifient par 2 et posent la division par 5, ou encore, pour trouver ce que représente 98% de 250, ils posent avec difficulté la multiplication par 98, etc.) ;

- des difficultés à fournir un ordre de grandeur ou à comparer des résultats.

Quelques candidats, nullement habitués à traiter de questions quantitatives ou à effectuer des opérations arithmétiques, ont pu convaincre le jury qu'il ne s'agissait pas chez eux d'une inaptitude mais seulement d'un manque d'entraînement au calcul en faisant preuve de leur aptitude logique ainsi que de la rigueur et de la précision attendues par le jury : ils ont obtenu de très bonnes notes à cette épreuve.

L'exemple suivant illustre les attentes du jury dans cette épreuve.

Dans un texte de Siméon-Denis Poisson présenté aux candidats (« Recherche sur la probabilité des jugements », 1837), les procès criminels étaient classés en deux catégories selon qu'ils avaient pour objet des attentats aux personnes ou aux biens. L'auteur indiquait que les premiers donnaient lieu à des pourcentages d'acquittements de 52% et les seconds de 34%, tout en précisant que le nombre des affaires concernant les attentats aux personnes était environ le tiers de celles concernant les biens, soit le quart de l'ensemble.

Interrogé sur le pourcentage global d'acquittements, un candidat A a répondu 86%, pensant qu'il fallait ajouter les deux pourcentages ! Par contraste, le jury a donc apprécié le bon sens d'un candidat B qui a répondu, avant toute tentative de calcul, que la réponse se situait entre 34% et 52%, et plus proche de 52% que de 34%. Le calcul d'une moyenne pondérée, dans un cas aussi simple est exigible des candidats.
Le texte de Poisson, écrit dans une langue claire et élégante, était précis mais un peu touffu. Le premier objectif de l'interrogation était d'en produire un résumé pertinent.

Le candidat A avait dressé du texte, un compte-rendu plutôt ennuyeux et confus alors que le candidat B en résuma le thème, le contenu et les conclusions en peu de mots. Il proposa ensuite une synthèse des données chiffrées sous la forme d'un tableau. Avec ce tableau parfaitement lisible et très complet, il était bien placé pour répondre ensuite aux questions posées. Le bon sens arithmétique dont il fit preuve, allié à la clarté jamais démentie de son argumentation lui ont permis d'obtenir la note de 18/20, malgré quelques erreurs de calcul considérées comme mineures par le jury. Rigueur logique ne signifie pas virtuosité « calculatoire », mais l'esprit d'analyse n'exclut pas l'esprit de synthèse.

CULTURE ET SCIENCES HUMAINES (toutes options)

Cette année, le jury tient tout d'abord à attirer l'attention des candidats sur la qualité de la langue.

Les notes les plus basses sont souvent le résultat d'une mauvaise compréhension du sujet. Le jury constate qu'un certain nombre de termes ne sont pas compris par les candidats : la providence est confondue avec la toute-puissance, la mystification avec quelque chose de mystique, l'arbitraire avec l'arbitrage, l'indicible est « ce qui ne se voit pas »… La pauvreté du vocabulaire empêche non seulement de comprendre le sujet, mais aussi de le traiter : parler du « rationnement » pour le « rationalisme » ou du « ressentiment » pour le « sentiment », du « transcendantal » pour le « transcendant ». On ne peut que recommander aux étudiants, durant leurs années de préparation, de consulter un dictionnaire à chaque fois qu'ils rencontrent un mot dont ils ne connaissent pas le sens.

Dans l'exposé, une expression correcte et claire est indispensable. On ne peut pas dire : « La servitude incombe de la situation du paysan » ou encore « être dans le lyrisme du sentiment, ça ne fait pas du rigoureux » ; sans parler de divers barbarismes : « revettre », « il a aquéri », la « chrétienneté ». On évitera la langue journalistique : « au final », « sociétal », le « ressenti », et les fautes de grammaire et de syntaxe : mélange d'interrogation directe et indirecte, « rapprocher à », « un énoncé dont on ne peut être prouvé »…

Rappelons le format de l'épreuve : 30 minutes de préparation, 20 minutes de passage (10 minutes d'exposé du candidat, 10 minutes d'entretien avec le jury).

L'objet de l'épreuve est d'évaluer les capacités du candidat à mobiliser des connaissances culturelles (littérature, philosophie, histoire, histoire de l'art, histoire des sciences, sciences humaines en général, etc.) et à construire, à l'aide de ces connaissances, un propos argumenté, organisé et correctement formulé.

On attend du candidat qu'il analyse le sujet, en comprenne les enjeux, et construise un plan découlant de cette analyse.

En présence d'une phrase, le candidat doit préalablement analyser les termes importants et en extraire une problématique. S'il s'agit d'un terme, il est souhaitable de le définir et d'en envisager l'éventuelle polysémie. L'épreuve étant intitulée « culture et sciences humaines », elle implique que l'exposé s'appuie sur des connaissances générales et des références précises, qui ne se limitent pas à des titres mais donnent matière à une analyse qui montre que l'œuvre citée est réellement connue. De nombreux exemples passe-partout ont été utilisés, quel que soit le sujet de l'exposé : les *Ambassadeurs, 1984, L'Albatros,* Hannah Arendt… Le recyclage à tout propos du programme de l'écrit est non seulement mal venu mais aussi dangereux tant il entraîne les candidats à glisser dans le hors-sujet.

Le jury se réjouit de la présence d'un plan, le plus souvent pertinent, lié à une problématique générale et conduisant à une conclusion dans la plupart des cas. Il observe aussi avec satisfaction que nombre de candidats savent respecter la durée prévue pour l'exposé. La mythologie est en général bien connue.

Quelques présentations témoignent d'une réelle culture personnelle, d'une capacité à choisir les exemples et à éviter les références hors de propos. Plusieurs témoignent d'un talent certain dans l'élaboration des idées et leur exposition, et d'un sens des nuances à la fois du point de vue sémantique et conceptuel.

Exemples de sujets :

- « Ce qui est le meilleur dans le nouveau est ce qui répond à un désir ancien »
- « Connais-toi toi-même »
- « Contre qui luttons-nous jamais sinon contre notre double ? »
- « Deux dangers ne cessent de menacer le monde : l'ordre et le désordre. »
- « Il n´y a pas de beau sujet d´art. Yvetot vaut Constantinople. »
- « Il y a de belles choses qui ont plus d'éclat quand elles demeurent imparfaites que quand elles sont trop achevées. »
- « Je ne puis m'écrire »
- « Jouets d'enfant, les opinions humaines. »
- « L'animal nous dit quelque chose de nous-mêmes. »
- « L'argent est un bon serviteur et un mauvais maître »
- « L'homme étouffe dans l'homme »
- « La mort enlève tout sérieux à la vie. »
- L'honneur
- L'idée de Providence
- L'imparfait
- L'imprimerie
- L'indicible
- L'influence
- L'inspiration
- L'intellectuel
- La responsabilité de l'écrivain
- Le bonheur peut-il se définir ?
- Le geste et la parole
- Le passé existe-t-il en dehors de la représentation que nous en avons ?
- Y a-t-il des questions sans réponse ?

LE TRIPTYQUE

Le triptyque offre aux candidats la possibilité de manifester la qualité de leur réflexion. Les trois moments de l'épreuve (convaincant, répondant, observateur) permettent aux examinateurs d'apprécier comment les candidats élaborent leur argumentation dans une situation d'interaction.

Complémentairement aux qualités intellectuelles indispensables, l'épreuve permet de manifester des qualités personnelles d'engagement, de sincérité et d'autonomie. Elle explicite comment les candidats réfléchissent et travaillent avec autrui.

L'écoute, l'intégration des idées d'autrui (sans soumission servile, mais sans opposition de principe), la créativité, l'originalité sont des qualités indispensables pour le parcours que l'école HEC propose à ses étudiants et pour leur vie professionnelle future. Au fond ce que l'on attend, et que l'on analyse à travers le prisme des trois temps de l'épreuve, c'est une compréhension intellectuelle des enjeux de notre temps, c'est une écoute responsable gage d'une pensée ouverte et autonome, et c'est l'intelligence des situations mettant en confrontation différents acteurs autour d'une réflexion commune.

Avec la mise en perspective des trois facettes de l'épreuve, avec ce mécanisme qui permet de « révéler» (au sens photographique) les qualités et les faiblesses des candidats, on peut affirmer que l'épreuve remplit bien son rôle et que les difficultés pour les examinateurs de déterminer ensemble une note commune sont de plus en plus rares.

Les sujets proposés, renouvelés chaque année, dont quelques exemples sont donnés à la fin de ce rapport, sont choisis en raison de leur caractère problématique que les candidats doivent interroger : ni opposition dichotomique brutale (pour ou contre le nucléaire ?) ni formulation platement assertive (le nucléaire se justifie pour des raisons économiques) mais l'ouverture d'une réflexion possible, argumentée, contradictoire (le nucléaire : une technologie comme les autres ?).

Une épreuve de mieux en mieux comprise, des enjeux et des objectifs clarifiés dans la tête des candidats et de ceux qui participent à leur formation. Il faut cependant pour aider les futurs candidats reprendre les principaux travers constatés lors de la session 2012. Le défaut majeur (tant pour le convaincant que pour le répondant, mais aussi pour l'observateur, témoin passif et souvent soumis du débat), c'est l'absence de questionnement du sens du sujet.

On ne saurait trop répéter aux candidats que la première question à se poser quand on leur propose un sujet est toujours : pourquoi ce sujet, quel intérêt y a-t-il à me confronter à cette question ?

Plus précisément, on peut noter les faiblesses suivantes :

1. En position de convaincant :
    a. Une lecture partielle et incomplète du sujet, une définition imprécise des termes et de la problématique proposée ainsi qu'une absence de recul,
    b. Un choix de position relevant du goût, de l'aléa ou de l'opportunité et non de réflexions, de valeurs ou de principes. De plus en plus de candidats considèrent, à tort, que toute « position » est possible dès lors qu'elle est affirmée.
    c. Un plan souvent « convenu » en trois points (90% des exposés). Les trois points sont parfois sans lien, sans cohérence (il faut trois points, un point c'est tout, pensent à tort beaucoup de candidats !)
    d. Un manque de rigueur et de précision dans la structure de l'exposé ou dans la forme. Conseillons, à cet égard, aux candidats d'utiliser au mieux le temps court (4 minutes) de l'exposé (court, mais affreusement long pour certains qui s'arrêtent après deux minutes à peine) en évitant, au début de l'exposé, de faire une annonce de plan déjà très explicite qui fait redondance avec l'exposé proprement dit, qui parfois n'apporte rien ensuite. Annoncer 2 ou 3 points et les aborder immédiatement et clairement pour la formulation est suffisant.

   e. Le temps proposé pour l'exposé est de 4 minutes : cela signifie que le critère de gestion du temps est un élément logique de l'appréciation. Si l'exposé est un peu court, mais cohérent, structuré, riche, le candidat ne sera pas pénalisé. Si le candidat poursuit au-delà de 4 minutes, il sera arrêté par le jury sans pouvoir conclure et son évaluation s'en trouvera minorée.

2. En position de répondant :
   a. Un manque de recul, d'envergure, d'imagination,
   b. Un choix « par principe » de la position inverse de celle défendue par le convaincant sans expliciter ce qui fonde ce choix (raisonnement, lecture historique et théorique, principes ou valeurs personnels),
   c. Une volonté affichée de façon un peu systématique et artificielle d'établir en fin d'épreuve une position commune qualifiée de « consensus »,
   d. La répétition des positions déjà évoquées au moment de la conclusion sans synthèse réelle,
   e. Il faut conseiller au candidat de commencer par réfléchir avant de s'engager sans discernement dans le débat, lequel ne peut se réduire à une interrogation du convaincant : le répondant n'est pas un journaliste qui vient recueillir les réflexions de l'exposant. Il doit se situer lui-même dans le débat et prendre position au sens où nous l'avons développé au début de ce rapport c'est à dire en développant une pensée structurée et autonome qui peut prolonger celle du convaincant ou s'en départir selon les hypothèses proposées et justifiées par l'un et l'autre.

3. En position d'observateur :
   a. Trop de généralités, trop d'hésitations,
   b. La recherche systématique des contradictions supposément exprimées par les candidats,
   c. Un fréquent manque de discernement et une lecture souvent réductrice orientée sur des questions de forme (l'expression de qualités telles que la modestie, l'humilité, voire la politesse est souvent considérée comme un signe de faiblesse),
   d. Une évaluation du débat souvent centrée sur l'obsession d'avoir obtenu ou non un consensus,
   e. Il faut conseiller au candidat en position d'observateur d'aller à l'essentiel :
      - ✓ Que s'est-il passé dans ce débat ?
      - ✓ Quelles sont les contributions respectives du convaincant et du répondant ?
      - ✓ Y a-t-il ou n'y a-t-il pas de progression, d'avancée et de résultat à la fin du débat ?
      - ✓ Comment qualifier les performances et les comportements des candidats et les relations qu'ils ont établies pendant la discussion ?

Distance, compréhension des paradoxes, humour restent des qualités appréciées des examinateurs…mais sont assez rares. La maîtrise incertaine de la langue conjuguée à une insuffisante réflexion met en péril de nombreux candidats. Deux exemples de débat permettent d'illustrer cette situation :

- « Notre défiance justifie la tromperie d'autrui. Qu'en pensez-vous ? » Le convaincant, malheureusement suivi par le répondant, développe son argumentation à partir des « défis »lancés à autrui !
- « L'écologie est-elle une nouvelle forme de conservatisme ? » Le convaincant développe son argumentation en expliquant qu'il s'agit de savoir si l'écologie permet la « conservation » de la nature !

Les candidats manifestent à juste titre, un fort intérêt pour les propositions concrètes et se défient, tout aussi justement, des considérations abstraites. L'ennui, c'est que pour beaucoup d'entre eux, concret s'assimile à prosaïque, à ce qui se passe entre nous ici et maintenant, sans recul, ni élaboration et qu'abstrait est le terme employé pour théorique et conceptuel !

Certains candidats se plaignent des citations de leurs camarades car elles renvoient à des situations historiques, donc dépassées !

Constatons pour conclure que de très nombreux candidats font preuve de qualités remarquables (dûment constatées par des notes exceptionnelles) dans les trois composantes de l'épreuve :

- Des convaincants réalistes, stratèges, assumant leur analyse et leur approche avec honnêteté, s'exprimant avec clarté et rigueur,
- Des répondants faisant preuve d'écoute et de tolérance, vifs, capables de sérier les problèmes et de réagir positivement à des propositions,
- Des observateurs lucides, attentifs à ce qui est dit (mais aussi à ce qui est implicite dans les argumentations) capables d'analyser un débat et d'en faire la synthèse avec finesse et respect.

Exemples de sujets :

- Le clonage va-t-il s'imposer ?
- L'école joue-t-elle encore un rôle de promotion sociale ?
- Le nucléaire : une technologie comme les autres ?
- Les séries remplacent-elles le cinéma ?
- Le salariat a-t-il un avenir au 21ème siècle ?
- Peut-on faire de la politique sans être machiavélique ?
- Le vrai bonheur coûte peu. Qu'en pensez-vous?
- Vie privée, vie publique : y a-t-il une frontière ?
- Faut-il plafonner les rémunérations ?
- La presse est-elle objective ?

MATHEMATIQUES (options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L)

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des 4 sessions de 4 jours, ces épreuves ont mobilisé 3 à 5 jurys par demi-journée.

1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:
- *option scientifique* (441 candidats): 11,32 (11,52 en 2011)
- *option économique* (173 candidats): 9,77 (10,42 en 2011);
- *option technologique* (17 candidats): 12,59 (11,92 en 2011);
- *option littéraire B/L* (14 candidats): 10,71 (10,53 en 2011).

3. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignement:

Option scientifique

Le niveau général est bon, comparable à celui du concours 2011 : les notes s’étendent entre 3 et 20 et l’écart-type de 3,72 révèle une discrimination relativement élevée entre les admissibles.
Il y a quelques candidats excellents dont les exposés très clairs, concis et exhaustifs s’appuient sur une argumentation pertinente qui leur permet de prouver les résultats attendus.
Il est manifeste que beaucoup de candidats se préparent sérieusement à cet oral de mathématiques : les prestations sont essentiellement orales et le tableau n’est utilisé que comme support de l’exposé.

Option économique

On assiste cette année à un décrochage du niveau des candidats de cette option par rapport à ceux de l’option scientifique. Cette rupture est confirmée par la baisse de la note moyenne qui passe de 10,42 à 9,77.
Les observations relevées l’an passé restent non seulement d’actualité mais tous les points négatifs se sont renforcés.
Les concepts fondamentaux sont peu maîtrisés et font parfois l’objet de graves confusions (fonction de répartition et densité, « dimension » d’une application linéaire), le cours n’est pas bien assimilé (méthode des rectangles, définition de la convergence d’une intégrale généralisée), les explications utilisent un langage mathématique très approximatif qui nuit à la rigueur de l’exposé, les techniques de calculs élémentaires font souvent défaut (limites de fonctions) et les confusions entre condition nécessaire et condition suffisante se sont accrues : on retrouve les lacunes non comblées héritées du secondaire.

La présence de quantificateurs dans un sujet revêt souvent pour les candidats, un caractère purement « décoratif » tant ils sont mal utilisés voire ignorés.
On note enfin dans l'attitude de nombre de candidats un degré de maturité assez faible qui se traduit par une certaine difficulté à se concentrer et à établir des liens entre les questions d'un exercice, et par une prise d'initiative très « timide ».

Option technologique

Les niveaux des candidats sont assez disparates, les notes s'étalant entre 6 et 20 avec un écart-type élevé de 4,09.

Option littéraire B/L

Les résultats sont encore plus contrastés que ceux des candidats de l'option technologique : sur les 14 candidats admissibles présents, la moyenne est de 10,71 et s'accompagne d'un écart-type très élevé de 4,53. Il est fort probable que le choix de l'épreuve à option de l'écrit (sciences sociales ou mathématiques) constitue l'explication majeure de cette dispersion des notes.

4. Remarques

Les remarques formulées dans le rapport du concours 2011 restent valables pour 2012.
Le niveau de connaissances en probabilités est plutôt bon en option scientifique et acceptable en option économique. Dans ces deux options, on observe des progrès substantiels en algèbre et un déclin des connaissances en analyse (les études de fonctions et les représentations graphiques restent préoccupantes).
Enfin, les candidats « massacrent » allègrement l'alphabet grec, très employé dans les notations mathématiques, avec des confusions de lettres quasi-systématiques.

Le jury recommande aux futurs candidats d'éviter de réciter à l'oral des recettes qu'ils ne maîtrisent pas : même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d'écrit où la part d'initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2012.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S8

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$.

2.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série de terme général $\dfrac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$ est convergente.

On pose alors : $S_x(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_A(k)x^k}{k!}$.

b) On suppose que $A \subseteq B$. Comparer $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

c) On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Exprimer $S_x(A \cup B)$ en fonction de $S_x(A)$ et $S_x(B)$.

d) Calculer $S_x(\emptyset)$, $S_x(\mathbb{N})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_x(\{p\})$.

3. On suppose désormais que $x \in]0, \ln 2[$.

a) Établir pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'inégalité stricte : $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!}$.

b) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $A \cap B = \emptyset$.
Montrer que si A n'est pas vide et si le plus petit élément m de $A \cup B$ appartient à A, alors :

$$S_x(B) < \frac{x^m}{m!} \leqslant S_x(A)$$

En déduire que si $S_x(A) = S_x(B)$, alors : $A = B = \emptyset$.

c) Montrer que l'application $A \mapsto S_x(A)$ est injective.

Exercice sans préparation S8

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $]0, 1]$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}$ et $Y_n = (\mathrm{e}X_n)^{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice principal S9

1. Question de cours : Sommes de Riemann.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n ; on effectue dans cette urne des tirages aléatoires successifs d'une boule avec remise. On note $X_1, X_2, \ldots$, les numéros successifs obtenus et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note Y le rang du premier tirage pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à X_1, sous réserve qu'un tel numéro existe.

2. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $B_k = [X_k < X_1]$.

a) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P[B_2 \cap B_3 \cap \ldots \cap B_k]$.

b) Montrer que $P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k\right) = 0$.

c) Que peut-on dire de l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $Y(\omega)$ existe ? On admet désormais que cet ensemble est confondu avec Ω.

3.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $P[Y = m+1] = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i}{n}\right)^{m-1}$.

b) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ donnée par : $E(Y) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

4. On ne considère plus l'entier n fixé et on note désormais $Y^{(n)}$ la variable aléatoire notée précédemment Y.

a) Calculer pour tout entier $m \geqslant 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P[Y^{(n)} = m+1]$.

b) En déduire que la suite $(Y^{(n)})_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète qui n'a pas d'espérance.

Exercice sans préparation S9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer les valeurs propres de A.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que A n'est pas nécessairement diagonalisable.

Exercice principal S12

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite de densité f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, et de fonction de répartition Φ.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et établir pour tout entier naturel n, la formule :

$$E(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p \text{ est pair } (p \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

3.a) Montrer que pour tout $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$ est convergente. On note alors pour tout $a > 0$: $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$.

b) Exprimer pour tout $a > 0$, $F(a)$ en fonction de a.

4. Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$.

a) Vérifier que g peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.

b) Calculer $E(Y^2)$ et exprimer la variance $V(Y)$ en fonction de a.

Exercice sans préparation S12

Soit $E(\langle , \rangle)$ un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E. On suppose l'existence d'une constante réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que $\forall x \in E, \| f(x) \| = \alpha \| x \|$.
Montrer que $f^2 = \alpha^2 \, \mathrm{id}_E$.

Exercice principal S16

1. Question de cours : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dans le cas où elles possèdent une densité.

2. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (d'espérance $1/\lambda$) et la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$ (d'espérance $1/\mu$).

a) Donner une densité de $-Y$.

b) On pose $D = Z - Y$. Donner une densité de D.

c) Calculer $P(Y \leqslant Z)$.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, strictement positives et telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

3. On pose : $U = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Identifier la loi de U.

b) Soit j un entier donné de $[\![1, n]\!]$. En utilisant la variable aléatoire $Z_j = \inf\limits_{i \in [\![1,n]\!], i \neq j} X_i$, calculer $P(U = X_j)$.

c) La variable aléatoire $X_j - U$ est-elle à densité ? discrète ?

4. On pose : $V = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $X'_j = -\dfrac{1}{\theta} \ln(1 - e^{-\theta X_j})$.

a) Montrer que les variables aléatoires $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ sont indépendantes et suivent chacune la même loi que les variables aléatoires X_j.

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(V = X_i) = \dfrac{1}{n}$.

Exercice sans préparation S16

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n le polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par $P_n(X) = X^n + 1$.
Pour quelles valeurs de n, P_n est-il divisible par $X^2 + 1$?

Exercice principal S20

1. Question de cours : Théorème de la limite centrée.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires centrées réduites définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même densité de probabilité, et admettant des moments jusqu'à l'ordre 4.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note m_4 le moment d'ordre 4 de X_n.

a) Montrer que $m_4 > 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n^* = \dfrac{1}{\sqrt{n(m_4-1)}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - 1)$.

Justifier la convergence en loi de la suite $(Y_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \sqrt{\dfrac{n}{m_4-1}}\,\overline{X}_n^2$.

Calculer $E(U_n)$ et en déduire la convergence en probabilité vers 0 de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit x et ε deux réels arbitraires avec $\varepsilon > 0$.

a) Établir l'encadrement : $P(Y_n^* \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant P(Y_n^* \leqslant x+\varepsilon) + P(U_n \geqslant \varepsilon)$.

b) En déduire l'existence d'un entier N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$\Phi(x) - \varepsilon \leqslant P(Y_n^* - U_n \leqslant x) \leqslant \Phi(x+\varepsilon) + \varepsilon$$

c) Que peut-on en conclure pour la suite $(Y_n^* - U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((X_k - \overline{X}_n)^2 - 1\right)$.

Déduire des résultats précédents, la limite en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S20

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$, associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0, F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Exercice principal S23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\langle\,,\rangle$ son produit scalaire canonique.

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 au point $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ convexes et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2$, αf_1 , $\min(f_1, f_2)$ et $\max(f_1, f_2)$?

b) Lorsque $n = 1$ a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?

3. Soit f une fonction convexe et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, soit $g_{x,h}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g_{x,h}(t) = f(x + th)$.

a) Montrer que $g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'_{x,h}(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) En déduire que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x)$, où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.

d) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global au point a.

4. Dans cette question, soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.

a) Vérifier que f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = Ax$.

b) En déduire que si f est convexe, alors toutes les valeurs propres de A sont positives.

Exercice sans préparation S23

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant les conditions suivantes :

- $P(X = 0) = 0$;
- $P(X > 0) = \alpha > 0$;
- $P_{[X>0]}(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $a > 0$;
- $P_{[X<0]}(-X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ avec $b > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. La variable aléatoire X est-elle à densité ?
3. Établir l'existence de $E(X)$. Calculer $E(X)$.

Exercice principal S27

1. Question de cours : Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^3 - X^2 - 1$.

a) Montrer que toutes les racines de P sont simples.

b) Montrer que P admet une racine réelle, notée b, et deux racines complexes conjuguées, notées z et $\bar{z}$.

c) Calculer le produit $bz\bar{z}$. Comparer b et $|z|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S une partie de $[\![1, n]\!]$ qui possède la propriété suivante : si $p \in S$, alors $p+1$ et $p+2$ n'appartiennent pas à S ; on dit que S est une "partie spéciale" de $[\![1, n]\!]$. Par exemple, l'ensemble vide est une partie spéciale.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de parties spéciales de $[\![1, n]\!]$ et on pose $t_0 = 1$.

a) Calculer t_1 , t_2 et t_3.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

4. Soit V l'ensemble des suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $(v_0, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = v_n + v_{n+2}$.

a) Montrer que V est un espace vectoriel.

b) Déterminer la dimension de V ainsi qu'une base de V.

5) Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & z & \bar{z} \\ b^2 & z^2 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice M est inversible.

b) Quelles sont les suites géométriques de V ?

c) Soit α, β et γ des constantes complexes telles que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha b^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n = 0$.
Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

d) En déduire qu'il existe une constante réelle A et une constante complexe B vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = Ab^n + Bz^n + \overline{B}\bar{z}^n$.

Exercice sans préparation S27

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ admet une espérance. Montrer que X admet une espérance.

2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice principal S28

Soit p un paramètre réel inconnu vérifiant $0 < p < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli d'espérance p.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$; on note $E(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X et exp la fonction exponentielle.

1. Question de cours : Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X}_n$, un intervalle de confiance de risque α $(0 < \alpha < 1)$ pour le paramètre p.

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = -pt + \ln(1 - p + pe^t)$.

a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde vérifie : $\forall t \geqslant 0,\ f''(t) \leqslant \frac{1}{4}$.

b) Montrer à l'aide d'une formule de Taylor que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $f(t) \leqslant \frac{t^2}{8}$.

c) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $E\big(\exp(t(X_k - p))\big) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)$.

3.a) Montrer que si S est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives et a un réel strictement positif, on a : $P(S \geqslant a) \leqslant \frac{E(S)}{a}$.

b) À l'aide des questions 2.c) et 3.a), établir pour tout couple $(t, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^+)^2$, l'inégalité :

$$P(\overline{X}_n - p \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{8n}\right)$$

c) Montrer que pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, on a : $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-2n\varepsilon^2)$.

d) En déduire un intervalle de confiance de risque α pour le paramètre p et comparer sa longueur, lorsque α est proche de 0, à celle de l'intervalle de confiance demandé dans la question 1.

Exercice sans préparation S28

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$. On note $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.

1. Exprimer P^{-1} en fonction de P.

2. Établir l'inégalité : $\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} p_{i,j}\right| \leqslant n$.

Exercice principal S33

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.
Rappeler la signification de la relation : $v_n = o(u_n)$.
Montrer que si $v_n = o(u_n)$ et si la série de terme général u_n est convergente, la série de terme général v_n l'est aussi et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$.

2. Soit α un réel strictement positif.

a) Établir la relation : $e^{-n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire l'existence d'un réel c_α et d'une variable aléatoire X_α à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_\alpha = n]) = c_\alpha\, e^{-n^\alpha}$$

c) On suppose que $\alpha = 1$.
Identifier la loi de X_1 et calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité conditionnelle $P_{[X_1 \geqslant n]}([X_1 \geqslant n+1])$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).

a) Établir la relation : $e^{-(n+1)^\alpha} = o\big(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\big)$.

b) À l'aide du résultat de la question 1, établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $P([X_\alpha \geqslant n+1]) = o\big(P([X_\alpha = n])\big)$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1]) = 0$.

4. On suppose dans cette question que $0 < \alpha < 1$ et on lui associe X_α comme en 2.b).

a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{(n+1)^\alpha}\big(e^{-n^\alpha} - e^{-(n+1)^\alpha}\big)$.

b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_{[X_\alpha \geqslant n]}([X_\alpha \geqslant n+1])$.

Exercice sans préparation S33

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice principal S34

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres.

Dans tout l'exercice, on associe à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice-colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On considère des réels a, b et c strictement positifs et la matrice $A = \begin{pmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{pmatrix}$.

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(u, v) = {}^tUAV$ est une forme bilinéaire symétrique.

3.a) Soit $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Déterminer les signes de $\varphi(u, u)$ et $\varphi(v, v)$ respectivement.
L'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

b) Montrer que A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. (on ne cherchera pas à les calculer)

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = x\,e^y + y\,e^z + z\,e^x$.

a) Montrer qu'un point critique $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ de f vérifie les conditions : $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = -1$, $\overline{x} < 0$, $\overline{y} < 0$ et $\overline{z} < 0$.
Donner un point critique de f.

b) Justifier l'existence du développement limité à l'ordre 2 de f en un point critique, et écrire ce développement.

c) La fonction f admet-elle un extremum local ?

Exercice sans préparation S34

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1.a) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n) \times \dfrac{n+1}{n+1-\lambda}$.

b) En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$.

2. Montrer que $P(X > n) = o\big(P(X = n)\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal S36

1. Question de cours : Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(u_n) = \dfrac{n-1}{n}$ et $u_n \in]0, \pi/2]$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

b) Déterminer une constante réelle C telle que $u_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et exp la fonction exponentielle.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\left(1 - \Phi(x)\right)$.

a) On pose pour tout $x > 0$: $\theta(x) = 1 - \Phi(x) - \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. Déterminer le signe de $\theta(x)$.

b) Calculer $f(0)$. Montrer que f est décroissante et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

4.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n}{x^2 + u_n^2}\,dx$ et calculer cette intégrale. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u_n f(x)}{x^2 + u_n^2}\,dx$; on note I_n cette intégrale.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $K_n = \displaystyle\int_{\sqrt{u_n}}^{+\infty} \frac{u_n\left(f(x) - f(0)\right)}{x^2 + u_n^2}\,dx$.
Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite 0.
c) En déduire la convergence et la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice sans préparation S36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1. Établir l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

Exercice principal S39

1. Question de cours : Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E_0 le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues s'annulant en 0.
Soit $t \in]0,1[$ et $\varphi_t : E_0 \longrightarrow E_0$ définie par : $\forall f \in E_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_t(f)(x) = f(x) - f(tx)$.

2.a) Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E et que φ_t est un endomorphisme de E_0.

b) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de E_0 dans E.

c) Montrer que l'endomorphisme φ_t est injectif.

3. Soit g une fonction de E_0 telle que : $\exists K > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant K|x - y|$.

a) Soit $f \in E_0$ vérifiant $\varphi_t(f) = g$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x) + f(t^n x)$.

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$.

b) Montrer que g admet un unique antécédent pour φ_t.

4. Trouver l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

Exercice sans préparation S39

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}, P(Y = 1) = P(Y = 2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice principal S40

1. Question de cours : Comparaison de séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n$.

2. Écrire une fonction Pascal ayant pour argument un entier n et renvoyant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.

a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Montrer que $\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)$.

Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln v_n$ est-elle convergente ?

b) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln v_k$ sans signe $\sum$, et en déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^{\alpha_0}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?

c) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D (indépendant de n) tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k \leqslant D \times \sqrt{n}$.

4.a) Établir pour tout entier naturel n, la relation : $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice sans préparation S40

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0,1[$ sur $g(]0,1[)$ telles que la variable aléatoire réelle $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice principal S42

1. Question de cours : Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

2. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & r & \cdots & r \\ r & 1 & r & \cdots & r \\ r & r & 1 & \cdots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $(1-r)$ est une valeur propre de M_r et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Trouver une matrice diagonale semblable à M_r.

c) Pour quelles valeurs de r, l'application $(x, y) \mapsto {}^tX M_r Y$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$? (X et Y désignent les matrices-colonnes dont les composantes sont celles des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

3. Soit $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1. On pose : $Z = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

a) Calculer pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la variance $V(Z_1 + \alpha Z)$ et la covariance $\text{Cov}(Z_1 + \alpha Z, Z_2 + \alpha Z)$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $\big(c_\alpha(Z_1 + \alpha Z), \cdots, c_\alpha(Z_n + \alpha Z)\big)$ soit égale à une matrice M_r définie dans la question 2.

4. Déduire des résultats précédents que M_r est la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire discret *si et seulement si* on a : $\dfrac{1}{1-n} \leqslant r \leqslant 1$.

Exercice sans préparation S42

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

2. Montrer que si $0 \leqslant \alpha < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice principal E3

1. Question de cours : Définition d'une série convergente. Pour quels réels $x > 0$, la série de terme général $(\ln x)^n$ est-elle convergente ? Calculer alors sa somme.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, à valeurs réelles, par : $f_n(x) = (\ln x)^n - x$.

a) Calculer les dérivées première et seconde f_n' et f_n'' de la fonction f_n.

b) Montrer que la fonction f_1 ne s'annule jamais.

c) Justifier l'existence d'un réel $a \in]0,1[$ vérifiant l'égalité : $f_2(a) = 0$.

3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à 3, et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$. On donne : $\ln 2 \simeq 0,693$.

a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $]1,+\infty[$ et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux racines, notées u_n et v_n, sur $]1,+\infty[$ (u_n désigne la plus petite de ces deux racines).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice sans préparation E3

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, de même loi de Bernoulli telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = q$. Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1.a) Calculer pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.

b) Montrer que $0 < \text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2. Calculer pour tout couple (k,l) tel que $1 \leqslant k < l \leqslant n$, $\text{Cov}(Y_k, Y_l)$.

3. On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$.

Exercice principal E4

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

2. Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

a) Calculer $I_{n,0}$.

b) Exprimer $I_{n,p+1}$ en fonction de $I_{n+1,p}$.

c) En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

On dispose de N urnes ($N \geqslant 1$) notées $U_1, U_2, \ldots, U_N$. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'urne U_k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient ; dans l'urne ainsi choisie, on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne considérée.
On suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, calculer la probabilité de choisir l'urne U_k.

Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}^*$. On note E_n et R_{2n+1} les événements suivants :
$E_n =$"au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu n boules rouges et n boules blanches" ;
$R_{2n+1} =$"on a obtenu une boule rouge au $(2n+1)$-ième tirage".

4.a) Exprimer $P(E_n)$ sous forme d'une somme.

b) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $P_{E_n}(R_{2n+1})$.

5. Montrer que $\lim_{N \to +\infty} P_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{n+2}{2n+3}$.

Exercice sans préparation E4

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

3. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Exercice principal E6

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $[0, \theta]$ où θ est un paramètre réel strictement positif inconnu. Une densité f de X est donnée par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } x \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Question de cours : Estimateur sans biais ; risque quadratique d'un estimateur.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
b) Tracer dans un repère orthogonal, l'allure de la courbe représentative de F.

4.a) Déterminer un estimateur T_n de θ, sans biais et de la forme $c\overline{X}_n$, où c est un réel que l'on précisera.
b) Quels sont les risques quadratiques respectifs associés aux estimateurs $\overline{X}_n$ et T_n de θ ?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.
a) Déterminer la fonction de répartition G_n et une densité g_n de M_n.
b) Calculer l'espérance de M_n. En déduire un estimateur sans biais W_n de θ.
c) Entre T_n et W_n, quel estimateur doit-on préférer pour estimer θ ?

6. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
a) Établir l'existence de deux réels a et b tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, vérifiant $P(M_n \leqslant a\,\theta) = \alpha/2$ et $P(b\,\theta \leqslant M_n \leqslant \theta) = \alpha/2$.
b) En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice sans préparation E6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^3 + A^2 + A = 0$ (matrice nulle). On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction de A et I.

2. On suppose que A est symétrique. Montrer que $A = 0$.

Exercice principal E7

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires finies.

Une puce fait une suite de sauts de longueur 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; chaque saut est effectué au hasard et avec équiprobabilité dans l'une des quatre directions portées par les axes $O\vec{i}$ et $O\vec{j}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la position de la puce après n sauts et X_n (resp. Y_n) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M_n.
On suppose qu'à l'instant initial 0, la puce est à l'origine O du repère, c'est-à-dire que $M_0 = O$.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $T_n = X_n - X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont indépendantes.

a) Déterminer la loi de T_n. Calculer l'espérance $E(T_n)$ et la variance $V(T_n)$ de T_n.

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n en fonction de $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

c) Que vaut $E(X_n)$?

d) Calculer $E(X_n^2)$ en fonction de n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale à la distance OM_n.

a) Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

b) Établir l'inégalité : $E(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité que la puce soit revenue à l'origine O après n sauts.

a) Si n est impair, que vaut p_n ?

b) On suppose que n est pair et on pose : $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). On donne la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$.

Établir la relation : $p_{2m} = \binom{2m}{m}^2 \times \dfrac{1}{4^{2m}}$.

Exercice sans préparation E7

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{n+m+1} \frac{dx}{x^3} \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.

b) En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal E8

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(i) = i - j + k$, $f(j) = i + 2j$ et $f(k) = j + k$.
On note Id l'application identité de E, $f^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

2.a) Montrer que $(2\,\mathrm{Id} - f) \circ (f^2 - 2f + 2\,\mathrm{Id}) = 0$ (endomorphisme nul de E).

b) L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?

c) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Soit P un sous-espace vectoriel de E défini par : $P = \{(x, y, z) \in E / ax + by + cz = 0$ dans la base $\mathcal{B}\}$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Soit U, V et W trois vecteurs de E dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont : $(-b, a, 0)$ pour U, $(0, c, -b)$ pour V et $(-c, 0, a)$ pour W.

a) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par (U, V, W) est de dimension 2.

b) En déduire tous les sous-espaces vectoriels P de E qui vérifient $f(P) \subset P$.

Exercice sans préparation E8

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ.

1. Montrer pour tout réel $a > 1$ et pour tout réel $x > 0$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant x\big(1 - \Phi(ax)\big) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-ax^2/2}$$

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} x\big(1 - \Phi(ax)\big)dx = 0$.

Exercice principal E10

1. Question de cours : Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est convergente. On pose : $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = \int_0^x \exp(t^2)\,dt$.

b) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité et la convexité de f.

c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n) = \dfrac{1}{n}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4.a) Établir pour tout $u \in [0, \ln 2]$, l'encadrement : $1 + u \leqslant e^u \leqslant 1 + 2u$.

b) En interprétant le résultat de la question 3.c), en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\int_0^{u_n} (1 + t^2)\,dt \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \int_0^{u_n} (1 + 2t^2)\,dt$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n^3 = 0$ et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation E10

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (d'espérance $\dfrac{1}{p}$) et Y une variable aléatoire telle que :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impair} \\ \dfrac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance de Y.

Exercice principal E11

1. Question de cours : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes ; lois marginales et lois conditionnelles.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit p un réel de $]0,1[$. On pose : $q = 1 - p$.
On suppose que :

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4. Déterminer la loi de $X - Y$.

5.a) Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice sans préparation E11

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ($n \geqslant 1$). On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$ (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice principal E21

1. Question de cours : Définition et propriétés des fonctions de classe C^p ($p \in \mathbb{N}$).

Soit α un réel non nul et soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = x\, e^{\alpha x}$.
On note E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par f_1 et f_2.

Soit Δ l'application qui, à toute fonction de E, associe sa fonction dérivée.

2.a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de E.

b) Montrer que Δ est un endomorphisme de E. Donner la matrice A de Δ dans la base (f_1, f_2).

c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif ? diagonalisable ?

3. Calculer A^{-1}. En déduire l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = (2x - 3)\, e^{\alpha x}$.

4.a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.

b) En déduire la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de la fonction f définie dans la question 3.

Exercice sans préparation E21

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = (-1)^X$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer l'espérance $E(Y)$ de Y.

2. Trouver la loi de Y.

Exercice principal E22

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale impropre.

Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$.

2. Montrer que le domaine de définition de f est $D =]-\infty, 1[$.

3. Déterminer le sens de variation de f sur D.

4.a) Établir pour tout $x \in D$, l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1-x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

5.a) Calculer $f(0)$.

b) Établir pour tout $x < 0$, une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Exercice sans préparation E22

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère n boules numérotées de 1 à n que l'on place au hasard dans n urnes, chaque urne pouvant recevoir de 0 à n boules.

1. Calculer la probabilité p_n que chaque urne reçoive exactement 1 boule.

2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. SUJETS DE L'OPTION TECHNOLOGIQUE

Exercice principal T1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t^2/2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T.
b) Déterminer une densité f de T.

3. On pose pour tout réel A strictement positif :

$$I(A) = \int_0^A t^2 e^{-t^2/2} dt \text{ et } J(A) = \int_0^A t^3 e^{-t^2/2} dt$$

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
a) À l'aide d'intégrations par parties, établir les deux relations suivantes :

$$I(A) = -Ae^{-A^2/2} + \sqrt{2\pi}(\Phi(A) - \frac{1}{2}) \text{ et } J(A) = -A^2 e^{-A^2/2} + 2\int_0^A f(t)dt$$

b) En déduire les valeurs respectives de $\lim_{A \to +\infty} I(A)$ et $\lim_{A \to +\infty} J(A)$.
c) Calculer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

Exercice sans préparation T1

Soit a, b, c et d des réels tous non nuls. Déterminer toutes les matrices carrées A d'ordre 2 avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui vérifient la propriété : $A^2 = 2A$ (on exprimera les solutions en fonction du produit bc).

Exercice principal T2

1. Question de cours : Définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

Soit α un réel donné vérifiant $\alpha > 3$.

2. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha - 1}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X définie sur $[1, +\infty[$.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

b) Étudier les variations de F.

c) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (pour le dessin, on prendra $\alpha = 4$).

4. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice sans préparation T2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice principal T3

1. Question de cours : La loi binomiale.

On considère un ensemble de composants électroniques dont on souhaite étudier les caractéristiques de durée de vie. On suppose que la durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire T de densité de probabilité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} e^{-t/a} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

(le paramètre a est un réel strictement positif).

2. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction f.

3. Quelle est la probabilité qu'un composant soit encore "en vie" à l'instant t ? (c'est-à-dire la probabilité de survie au-delà du temps t).

4. Calculer la durée de vie moyenne (espérance mathématique) de chaque composant.

5. À l'instant $t = 0$, on commence une observation sur n composants ($n \geqslant 1$) dont les durées de vie sont supposées indépendantes. Pour un instant fixé t_0, on note N_{t_0} la variable aléatoire égale au nombre de composants encore "en vie" à l'instant t_0.

a) Quelle est la loi de probabilité de N_{t_0} ?

b) Donner l'espérance mathématique et la variance de N_{t_0}.

Exercice sans préparation T3

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On note I la matrice unité d'ordre 3. Trouver une relation entre A, A^2 et I.

2. En déduire que A est une matrice inversible. Calculer l'inverse A^{-1} de A.

4. SUJETS DE L'OPTION B/L

Exercice principal B/L1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.a) Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

b) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$, que l'on justifiera, montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \pi$.

3. Montrer que la fonction $g = \dfrac{1}{\pi} f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

4. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité g. Soit G la fonction de répartition de X.

a) Établir l'existence de l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X. En déduire la valeur de $E(X)$.

b) Calculer pour tout x réel, $G(x)$. Tracer la courbe représentative de G dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Exercice sans préparation B/L1

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui vérifient $f \circ g = \mathrm{Id}$, où Id est l'endomorphisme identité de E.

Démontrer les trois propositions suivantes :

a) $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

b) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$.

Exercice principal B/L6

1. Question de cours : Densité d'une variable aléatoire réelle et relation avec la fonction de répartition.

2.a) Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est convergente. On définit alors la fonction f sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b) Justifier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_*^+$. Pour $x > 0$, calculer la dérivée $f'(x)$.

3.a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$.

b) À l'aide d'une intégration par parties dont on justifiera la validité, montrer que pour $x > 0$:
$f(x) = -e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$.

c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} x^k f(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} x^k f(x)$.

4.a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Montrer que g peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$.

b) Montrer que X admet des moments de tous ordres.

c) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le moment $E(X^k)$ d'ordre k.

Exercice sans préparation B/L6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que : $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

2. On suppose que $f+g$ est bijectif et que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

HISTOIRE GEOGRAPHIE ET GEOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN (HGG)
(option scientifique)

Les règles de tirage des sujets ont été modifiées cette année mais nous ne pensons pas que ce changement puisse bouleverser les résultats entre les candidats sérieux et les autres.
Le fait de ne tirer qu'un seul sujet condamne ceux ou celles qui ont fait des « impasses » ou ont appris trop superficiellement.

La répétition du même sujet par petits groupes permet, de plus, des comparaisons plus faciles.
Il est d'autant plus important de dominer les « fondamentaux » du concours. Que dire d'une géopolitique où Caspienne et Baltique se mélangent ? D'une guerre avec le Japon qui se termine dès 1942 avec l'envoi de deux bombes atomiques…Il n'est pas ici question de stigmatiser des erreurs factuelles mais de souligner que toute analyse sérieuse, basée sur des lectures appropriées, ne peut se bâtir sur de l'à peu près.

De même des sujets sur l'entreprise et les entrepreneurs supposent des noms, des exemples précis. Il faut lire et relire les sujets : pandémie ne veut pas dire épidémie, un sujet qui s'arrête dans les années 1930 ne doit pas aller jusqu'à aujourd'hui…

Les termes géopolitiques sont toujours aussi flous. Mais le jury, à l'écoute d'un exposé bien construit et dégageant des hypothèses solides, n'a pas arrêté son bras et les meilleures analyses ont été très bien récompensées. L'épreuve est restée discriminante et juste comme les autres années.

<u>Exemples de sujets :</u>
Etre global et local à la fois
Les années 1920 dans le monde occidental : quels déséquilibres ?
La gouvernance européenne (UE) depuis 1986
Les femmes de plus en plus libres : une vision occidentale ?
Les pères de l'Europe se reconnaitraient-ils dans l'UE d'aujourd'hui ?
Les chinois et la conquête de la terre africaine
Tourisme de masse vs tourisme d'élite
La prolifération nucléaire : qui est responsable ?
Les nouveaux riches : Chine, Russie, Golfe…
Le charbon a-t-il un avenir ?
Les pays du Golfe : une richesse artificielle
Les littoraux français : un atout inexploité ?
La Chine et la mer : opportunités passées ou à venir
1968 : une péripétie ?
L'eau, une ressource plus importante que le pétrole
Qu'est-ce qu'un lobby ?
La précarité dans les pays riches
Le Brésil et l'Amazonie
Le regard des USA envers la construction européenne
De l'Europe des 6 à l'Europe des 27 : trop vite, trop grand ?
Les industries culturelles aux Etats-Unis depuis les années 1970
Les jeux olympiques depuis 1936 : une affaire de propagande ?
Qui a réussi sa décolonisation ?
Paradis fiscaux et centres financiers off-shore dans le monde depuis les années 60
Paix et développement en Afrique noire depuis les années 60
L'Asie centrale dans le grand jeu mondial
Banques et banquiers en Europe depuis les années 70
Lénine : idéologue ou pragmatique en matière économique et sociale
Gauche française et social-démocratie allemande face à l'économie
Les pays du Maghreb regardent-ils vers l'Europe ?

HISTOIRE LITTERAIRE

<u>Exemples de sujets B/L :</u>

Quel a été l'impact des événements de Mai 68 sur la France des années 1970 et 1980 ?

Les USA et l'URSS face à la question allemande (1945-1991)

La social-démocratie et l'exercice du pouvoir en Europe (1945-1950)

Le débarquement du 6 juin 1944 dans le déroulement de la seconde guerre mondiale

Le parti communiste français (1920-1940)

<u>Exemples de sujets A/L – Lyon :</u>

La mortalité infantile dans l'Europe du XIXe siècle

Réussites et échecs de la vaccination en Europe

L'eau et la maladie

L'hôpital en Europe

L'Haussmanisation

LANGUE VIVANTE : ALLEMAND LV1 – LV2 (toutes options)

LV1 : Pour 77 candidats présents, la note moyenne s'établit à 12,31 avec un écart-type de 3,69. Par rapport au concours 2011, le jury d'allemand constate un faible recul des candidats présents (81 en 2011) mais une baisse sensible de la moyenne à l'oral en LV1. Cette baisse s'explique en partie par une trop grande prudence (ou timidité ?) de nombreux candidats de niveau moyen ou bon ce qui nuit à la capacité communicative demandée. En revanche, les très bons candidats (de 17 à 20 sur 20), au nombre de 11, ont parlé avec aisance et fluidité et ont su démontrer l'éventail de leurs connaissances en civilisation.

LV2 : Avec 155 candidats présents, la participation reste stable par rapport à 2011 (156 présents). La note moyenne s'établit en 2012 à 12,81 et varie donc peu par rapport à 2011 (12,92). L'écart-type est de 3,31 en 2012. 19 candidats ont obtenu en 2012 une note de 17 à 20 sur 20. Le jury constate que par rapport à la LV1, de nombreux candidats LV2 ont parlé volontairement, sans trop d'inhibitions, et ont su démontrer ainsi une bonne capacité communicative. Certes, le niveau des connaissances en matière de civilisation est en moyenne inférieur au niveau des candidats LV1. Mais en matière de « volonté de puissance linguistique », de nombreux candidats LV2 ont surpris.

L'épreuve de <u>première langue</u> consiste, pour les candidats, à écouter par deux fois un texte enregistré d'une durée de 4 minutes environ lors d'une phase de préparation de 20 minutes au total. Le candidat se présente ensuite pendant 15 minutes devant les deux examinateurs pour résumer, analyser et commenter le texte enregistré et pour répondre à des questions sur le texte et la civilisation allemande.

L'épreuve de <u>deuxième langue</u> consiste en une préparation de vingt minutes également, lors desquelles le candidat lit un article de presse d'environ 450 mots. Ensuite, il se présente devant le jury pour un quart d'heure. L'examinateur « unique » écoute le résumé de l'article et les commentaires pendant 8 à 9 minutes. Il pose ensuite des questions sur le texte et la civilisation allemande pendant 5 à 6 minutes.

En première langue, les textes enregistrés provenaient de la presse allemande, *Welt am Sonntag, FAZ, et surtout des sites IT de dradio.de et de tagesschau*.de. Ces textes traitent divers aspects sociaux-économiques, politiques et historiques, tels que les vitites d'Etat du président Gauck, l'évolution de l'Europe, l'émergence du parti des Pirates, la démographie allemande, le système d'éducation, le stockage des déchets nucléaires, la politique culturelle, les élections, l'histoire (les années souvenirs), le passé de la RDA, le sentiment national, le fédéralisme, l'affaire Wulff, les interventions de G. Grass, la pauvreté.

En deuxième langue, les textes étaient également issus de la presse allemande, *Welt am Sonntag, FAZ, Die Welt, Welt.online, FOCUS Online, NDR.de, TAZ.de DerWesten.de, Neue Zürcher Zeitung, Berliner Zeitung, Handelsblatt, Wirtschaftswoche, Kölner Stadtanzeiger,Manager Magazin, Rheinischer Merkur, Deutsche Welle, Der Tagesspiegel, Stuttgarter Zeitung, FR-online, Süddeutsche Zeitung, Westdeutsche Allgemeine Zeitung (WAZ), Augsburger-Allgemeine.de*. Ils traitaient divers sujets de l'actualité allemande.

La difficulté pour le candidat consiste à percevoir en un laps de temps relativement réduit les idées majeures du texte, les chiffres les plus importants et les arguments principaux développés par l'auteur. A la suite d'un bref chapeau d'introduction qui aborde le thème général du texte, le résumé succinct doit mettre en relief l'articulation des informations dans un ordre choisi par le candidat. Ici, le candidat doit montrer qu'il a compris les informations et qu'il est capable de relier les arguments entre eux par des formules adéquates (transitions). Il doit présenter la conclusion du texte et passer ensuite à un commentaire qui, en partant du texte, lui permet d'aborder des questions liées à la thématique et de faire connaître ainsi son opinion personnelle et ses connaissances de la civilisation allemande.

Au point de vu de la maîtrise de la langue, le jury constate, même chez des candidats qui obtiennent la moyenne de 12 à 13/20 dans l'épreuve orale d'allemand, des fautes au niveau de la présentation des chiffres. Par exemple, pour exprimer des dates, ils disent très souvent « **in** 2005 » au lieu de « im Jahre 2005 » ou « 2005 » sans préposition, ce qui est plus simple et parfaitement correct. « Ich **gehe in** Berlin » pour exprimer le précédent voyage à Berlin reste inacceptable.

Dans leur majorité, les candidats comprennent le texte entendu ou lu et sont capables de le reconstituer de façon structurée et cohérente. Ils présentent en introduction le sujet principal du texte et annoncent brièvement un plan en deux ou trois parties. Ils ne passent pas trop de temps à expliquer l'articulation du plan pour ne pas perdre du temps pour l'analyse et les commentaires. La prestation des candidats qui savent, lors du commentaire, relier les arguments du texte à leurs connaissances de la civilisation allemande - marque d'intérêt pour le monde germanique - est particulièrement valorisée par le jury.

En revanche, le résumé du texte entendu ou lu ne doit pas se perdre dans trop de détails, ne sera pas présenté de façon chronologique ou énumérative. Paraphraser le texte d'origine ou en citer des extraits plus ou moins larges n'est pas indiqué. La priorité doit être donnée à la structuration et à l'articulation des principaux faits ou arguments aboutissant à un commentaire personnel qui exprime une opinion personnelle équilibrée, pesant le pour et le contre, et/ou qui insère les informations dans un contexte plus large.

A l'issue de la présentation proposée par le candidat s'engage une brève discussion (les 5 à 7 dernières minutes) dans laquelle le jury peut chercher à approfondir une idée, à tester la compréhension d'un terme trouvé dans le texte ou utilisé par le candidat. Mais le jury peut interroger le candidat également sur sa connaissance personnelle du monde germanique acquise lors de voyages, de séjours voire de stages effectués dans les pays de langue allemande.

Quant à la qualité de la langue, déterminante à bien des égards pour la réussite dans cette épreuve, la correction morphologique et syntaxique, grammaticale, ainsi que l'emploi d'un vocabulaire approprié, constituent les critères majeurs de l'évaluation. De nombreux candidats ne maîtrisent pas suffisamment les conjugaisons, ne déclinent pas correctement, abusent de barbarismes, ne savent pas construire correctement des phrases simples et n'emploient pas les prépositions indiquées. La présentation souffre aussi, dans de nombreux cas, de moyens lexicaux et idiomatiques permettant de relier les idées et arguments entre eux.

La gestion du temps de parole n'a pas posé de problèmes majeurs à la très grande majorité des candidats.

La maîtrise de la langue allemande et la compréhension du texte constituent le critère majeur pour l'évaluation de l'épreuve. Viennent ensuite le style employé et la richesse du vocabulaire, la capacité à structurer correctement les idées et de les relier entre elles par des transitions et formules idiomatiques appropriées. Savoir élargir l'horizon, insérer la thématique abordée par le texte dans un contexte plus large, montrer ses connaissances de la civilisation allemande et parler de son expérience personnelle acquise lors de voyages ou de stages, cet ensemble d'aptitudes et d'expériences ne doit pas être négligé.

La compréhension de textes enregistrés (1ère langue) ou écrits (2ème langue) doit figurer en tête des priorités des efforts de préparation des candidats. L'écoute (radio ou TV) et la lecture de la presse (journaux dont l'accès est désormais facilité par l'Internet) doivent être quotidiennes. Les textes abordent la plupart du temps les « grandes questions » de la politique, de la vie économique et sociale, de l'histoire. L'actualité des neuf derniers mois avant l'épreuve est privilégiée par les concepteurs de l'épreuve.

Le travail de la langue (et de sa correction) est indispensable pour la réussite à l'épreuve. Le jury préfère une langue simple mais correcte à des tentatives ratées d'emploi de formulations compliquées, peu appropriées ou fleuries.

Les techniques de présentation ne doivent pas être négligées. Savoir identifier rapidement le sujet du texte, classer les idées et arguments et savoir les articuler correctement, est essentiel. Le commentaire doit montrer que le candidat n'a pas seulement compris la teneur du texte mais sait aussi construire, sur cette base de compréhension, une opinion personnelle équilibrée qui montre l'éventail de ses connaissances sur la civilisation allemande. A cet égard, il est à noter que de nombreux candidats en LV2 (moins en LV1) manquent d'informations approfondies permettant de comprendre l'Allemagne actuelle (absence de repères en matière de culture et de civilisation).

Afin d'améliorer ces connaissances, il convient d'étudier dans ses grandes lignes (!) :

- l'histoire allemande, surtout les 19ème et 20ème siècles
- le système de l'Etat allemand moderne et la politique actuelle
- l'évolution actuelle de l'économie et de la société (grandes questions et défis)
- la géographie (capitales, fleuves et montagnes, principaux sites économiques, les Länder etc.)
- l'actualité culturelle (lire un roman récent dans la langue d'origine, avoir vu quelques films récents, « Barbara », par exemple)

Un séjour de longue durée, un stage d'un mois par exemple, s'avère la plupart du temps très efficace pour améliorer les automatismes linguistiques, le vocabulaire et la perception des différences interculturelles.

LANGUE VIVANTE : ANGLAIS (toutes options)

<u>Exemples de thème en LVI</u> :

Darwin vs Smith
Tyler Brûlé publishing Monocle
South China Tigers
Israel
Attack on Iran
The Euro zone
TV show for missing persons of color
NGOs in Haiti
Design thinking for business
Girls + sports

<u>Exemples de thème en LVII</u> :

Coke marketing
Chinese cars
No easy way out
Olympic games
How smartphones are changing your lives
Europe
Valérie Trierweiler
Urban districts
Money can’t buy me love
My working class people vote conservative

LANGUE VIVANTE : ARABE (toutes options)

LV1

23 candidats tous arabophones capables de comprendre aisément et de s'exprimer avec facilité. Tous n'ont cependant pas exploité le sujet d'une manière satisfaisante. Certains d'entre eux ont mal construit leur exposé, d'autres articulaient mal des mots clés ; leur propos devenait parfois flou. Le jury est persuadé qu'il s'agissait chaque fois d'un manque de préparation. En revanche cinq candidats ont été particulièrement brillants, faisant preuve de concision et d'une réflexion originale d'une maturité appréciable.
Echelle des notes : 12,5 à 19,5

LV2
Deux excellents candidats. Notes 18 et 19,5. Aucun défaut significatif.

LANGUE VIVANTE : ESPAGNOL

LV1

Après 20 minutes de préparation, les candidats, qui ont écouté deux fois successives le texte enregistré, doivent en faire un compte-rendu détaillé, afin de prouver qu'ils l'ont compris en profondeur. Ce compte-rendu doit être suivi d'un commentaire dans lequel le candidat fait la preuve de ses connaissances sur le sujet d'actualité proposé. L'examinateur n'intervient pas durant cet exposé de 8 à 10 minutes maximum. Le candidat est libre de ses choix tant pour ce qui est de la présentation que du contenu de sa réflexion. Commence ensuite le dialogue avec les examinateurs (au nombre de deux pour interroger en LV1) : approfondissement de certains points évoqués par le candidat dans sa présentation, questions sur certains passages omis, questions destinées à préciser la pensée et vérifier les connaissances des candidats. L'épreuve dure au total 15 minutes.

Les sujets proposés sont des articles de la presse espagnole et latino-américaine, parus depuis la fin du dernier concours. Ils peuvent traiter d'évènements politiques, économiques, de faits de société, sur lesquels le candidat doit faire preuve de connaissances précises. Quelques exemples d'articles proposés pour ce concours 2012 :

- *Acabar con la pobreza rural* – El País – discurso de Michelle Bachelet 7 /03/2012
- *Rajoy logra para el PP una mayoría histórica con 186 diputados y el PSOE se hunde con 110* (Madrid - 20/11/2011 - rtve.es)
- *Cuando el apoyo a la gestión se mide en votos* (15/10/11 - Página 12)
- *Las víctimas y las fuerzas de seguridad, escépticas ante el comunicado de ETA* (Madrid - 20/10/2011 - El Mundo)
- *Las FARC acorraladas tras muerte de Alfonso Cano según expertos* (7/11/2011- El Universal)
- ***Tráfico de carne humana hacia Estados Unidos*** (18/05/2011 - El País)
- *De nuevos ricos a nuevos pobres* (07/07/2011 - El País)

Beaucoup de candidats ont lu régulièrement la presse au cours de l'année et disposent des connaissances nécessaires pour commenter l'article et répondre aux questions. Certains cependant semblent considérer que seul leur niveau de langue sera évalué et n'ont pas fait l'effort de « préparer » réellement leur épreuve, comptant sur leurs facilités. Ceci explique évidemment certaines notes décevantes. Il ne suffit pas de bien parler, encore faut-il avoir quelque chose à dire. Le candidat ne doit pas hésiter à donner un avis personnel sur le fait proposé au commentaire, à s'engager dans une discussion avec les examinateurs, qui sauront toujours apprécier une réflexion personnelle, à condition qu'elle soit argumentée.

Le niveau de langue des LV1 a été cette année très variable selon les candidats. Certains s'exprimaient avec aisance et sans faire beaucoup de fautes, d'autres semblaient ignorer les bases les plus élémentaires de la langue (emplois de « ser » et « estar », conjugaisons, concordances de temps, vocabulaire précis).

En conclusion, il est recommandé aux futurs candidats de bien se préparer à l'épreuve, qu'ils soient bilingues ou non, afin de s'y présenter dans les meilleures conditions, avec un niveau de langue satisfaisant et des connaissances sur le monde hispanique.

Certains étudiants ont montré qu'il était possible d'obtenir d'excellents résultats. Bravo à eux et à tous ceux qui ont contribué à leur réussite.

LV2

Après 20 minutes de préparation, les candidats, qui ont lu et étudié le texte proposé, doivent en faire un compte-rendu détaillé, afin de prouver qu'ils l'ont compris en profondeur. Ce compte-rendu doit être suivi d'un commentaire dans lequel le candidat fait la preuve de ses connaissances sur le sujet d'actualité proposé. L'examinateur n'intervient pas durant cet exposé de 7 à 9 minutes maximum. Le candidat est libre de ses choix tant pour ce qui est de la présentation que du contenu de sa réflexion. Commence ensuite le dialogue avec l'examinateur (une seule personne pour interroger en LV2) : approfondissement de certains points évoqués par le candidat dans sa présentation, questions sur certains passages omis, questions destinées à préciser la pensée et vérifier les connaissances des candidats. L'épreuve dure au total 15 minutes.

Les sujets proposés sont des articles de la presse espagnole et latino-américaine, parus depuis la fin du dernier concours. Ils peuvent traiter d'évènements politiques, économiques, de faits de société, sur lesquels le candidat doit faire preuve de connaissances précises.

Quelques exemples d'articles proposés pour ce concours 2012 :

- *"Allí nos llaman vendepatrias porque no nos quedamos a pelear la crisis"* 15/06/ 2012 – El País
- *Cataluña ¿Adéu?* – La Vanguardia – 15/09/2011
- *Cien días del Gobierno Rajoy* - Editorial | 01/04/2012 – La Vanguardia
- *El futuro en Latinoamérica* - 9 /02/2012 – El País
- *El plan de Galuccio para transformar YPF*- Página 12 – 14 /06/ 2012
- *'Con los tratados de libre comercio estamos llamados a desaparecer'* LR La República, Bogotá, 17/05/ 2012
- *Escepticismo y suspicacia* - 26 /02/ 2012 El País
-

Beaucoup de candidats ont lu régulièrement la presse au cours de l'année et disposent des connaissances nécessaires pour commenter l'article et répondre aux questions. Certains cependant semblent considérer que seul leur niveau de langue sera évalué et n'ont pas fait l'effort de « préparer » réellement leur épreuve. Ceci explique évidemment certaines notes décevantes. Il ne suffit pas de bien parler, encore faut-il avoir quelque chose à dire. Le candidat ne doit pas hésiter à donner un avis personnel sur le fait proposé au commentaire, à s'engager dans une discussion avec les examinateurs, qui sauront toujours apprécier une réflexion personnelle, à condition qu'elle soit argumentée.

Le niveau de langue des LV2 a été cette année bon pour beaucoup de candidats. Certains s'exprimaient avec aisance et sans faire beaucoup de fautes. Mais d'autres aussi semblaient ignorer les bases les plus élémentaires de la langue (emplois de « ser » et « estar », conjugaisons, concordances de temps, vocabulaire précis).

En conclusion, il est recommandé aux futurs candidats de bien se préparer à l'épreuve, tant au plan de la langue qu'à celui des connaissances, afin de s'y présenter dans les meilleures conditions, avec un niveau de langue satisfaisant et une certaine culture sur le monde hispanique.

Certains étudiants ont montré qu'il était possible d'obtenir d'excellents résultats. Bravo à eux et à tous ceux qui ont contribué à leur réussite.

LANGUE VIVANTES : ITALIEN

Les notes s'échelonnent de 8 à 20 sur 20.

De nombreux excellents candidats.

Pour les autres, rappelons quelques principes élémentaires. Il convient de présenter le texte lu (LV2) ou entendu deux fois (LV1) en le résumant, ou mieux en l'analysant, puis d'élargir la présentation en en développant un ou plusieurs points, au choix. Ensuite le candidat répond aux questions posées par le jury. Le tout en italien.

Mieux vaut éviter de plaquer un « topo » tout prêt et le plus souvent « hors sujet ». Une lecture attentive s'impose: c'est bien du texte qu'il convient de parler et c'est sur lui que porteront les questions. Une mauvaise compréhension, une lecture superficielle amènent le jury à revenir sur le texte : souvent la réponse aux questions est sous les yeux du candidat trop pressé ou trop stressé ; celui-ci doit s'abstenir d'avancer un argument qu'il ne pourra pas justifier. Il n'y a pas de piège, c'est le candidat lui-même qui doit se surveiller pour être toujours prêt à justifier ce qu'il avance.

Le plus souvent l'épreuve se déroule sans grande surprise. Le candidat doit répondre le plus honnêtement possible et montrer souplesse et présence d'esprit lors de l'entretien : la façon de répondre est capitale (plus encore que les connaissances) ainsi que la culture générale.

Encore une bonne année pour ces oraux : bravo aux candidats : qu'ils partagent avec leurs professeurs de classe préparatoire ces félicitations et des encouragements pour les années à venir.

LANGUE VIVANTES : CHINOIS

LV II

A l’oral, on attend des candidats qu’ils soient capables de dégager le sens du texte, d’en discerner l’intérêt, et d’exprimer leur point de vue sur le sujet, et enfin à partir de là d’échanger avec l’examinateur, faisant preuve ainsi de leurs capacités de compréhension et de synthèse d’une part et d’expression en continu et en interaction d’autre part. La lecture du texte n’est pas exigée de façon systématique.

Les textes sont des extraits d’articles traitants de sujets d’actualité sans forte connotation technique. Les sujets de cette année portaient sur la nécessité de revenir sur la politique de l’enfant unique, la désaffection des jeunes Chinois pour les études scientifiques, ou le salaire moyen des Chinois.

Les candidats étaient fort bons dans l’ensemble, s’exprimant avec une bonne aisance, un certain vocabulaire. Les propos étaient pertinents.