Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.
L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.
Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC voie technologique se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés d'économie et de gestion dispensés en Grande Ecole ou dans une formation universitaire de troisième année de licence.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire, le programme se concentre sur le calcul matriciel. Le principal objectif de cette partie est la diagonalisation des matrices carrées. On évitera des exemples trop calculatoires.
  Ces notions de calcul matriciel trouveront leur application en probabilités (études de chaînes de Markov).

- En analyse, les séries et les intégrales généralisées sont étudiées en vue de leurs applications aux probabilités (variables aléatoires discrètes infinies et variables aléatoires à densité).
  Au quatrième semestre, l'étude des fonctions à deux variables réelles constitue un prolongement de l'analyse à une variable. Son objectif principal est d'initier les étudiants aux problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes, cruciaux en économie.

- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité, abordées dès la première année, sont complétées. L'objectif de cette partie du programme est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance que les étudiants ont rencontrés dès la classe de Terminale.

- Les travaux pratiques de mathématiques avec Scilab sont organisés autour de cinq thèmes faisant intervenir divers points du programme de mathématiques. Leur objectif est d'apprendre aux étudiants à utiliser Scilab de manière judicieuse et autonome et de leur permettre d'illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le logiciel Scilab comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.

Enseignement de mathématiques du troisième semestre

I - **Algèbre linéaire**

Le programme exclut toute notion de structure.

a) Matrices

Définition d'une matrice à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Matrices lignes, matrices colonnes. Opérations sur les matrices : multiplication par un scalaire, somme, produit de deux matrices.	Les définitions des opérations sur les matrices seront présentées à l'aide d'exemples issus de situations concrètes. Les propriétés des opérations seront admises sans démonstration et illustrées sur des exemples.
Transposée d'une matrice. Matrices symétriques.	Notation ${}^tA$. On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.
Matrices carrées d'ordre n. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, matrices diagonales, matrice identité. Matrices inversibles.	
Critère d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2. Exemples de calcul des puissances n-ièmes d'une matrice. Cas d'une matrice diagonale.	Admis. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Formule du binôme pour les matrices qui commutent.	On se limitera à des exemples simples lorsque l'une des matrices est nilpotente.
Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.	
Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss. Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.	On se limitera à des matrices carrées d'ordre inférieur ou égal à 3.

b) Réduction des matrices carrées

L'objectif est la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice. La notion de polynôme minimal est hors programme.

Polynôme d'une matrice. Polynôme annulateur.	Sur des exemples, utilisation d'un polynôme annulateur pour la détermination de l'inverse d'une matrice carrée.
Toute matrice carrée admet au moins un polynôme annulateur non nul.	Admis. Toutes indications devront être données aux candidats pour l'obtention d'un polynôme annulateur. Dans la pratique, on se limitera à des matrices carrées d'ordre 3. On vérifiera que le polynôme $X^2 - (a+d)\,X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Valeur propre, vecteur propre d'une matrice carrée.	
Si P est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de P.	La relation $AX = \lambda X$ entraîne, pour tout polynôme P, $P(A)X = P(\lambda)X$. Pour la recherche des valeurs propres d'une matrice carrée, on privilégiera l'utilisation d'un polynôme annulateur. Dans des cas simples, on pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss.
Matrices carrées diagonalisables. Diagonalisation d'une matrice carrée.	Une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice carrée P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. On remarquera que A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible, dont les colonnes sont des vecteurs propres de A. Existence de matrices non diagonalisables.
Application au calcul des puissances de A.	
Les matrices symétriques sont diagonalisables.	Admis.

II - **Analyse**

1 - Séries numériques

Les séries sont introduites essentiellement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Définition. Convergence d'une série. Somme d'une série convergente.	
Condition nécessaire de convergence.	Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Série géométrique. Convergence et somme.	La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $\mid x \mid < 1$, et, dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Les dérivées des séries géométriques ne font pas partie des attendus du programme.
Série exponentielle. Convergence et somme.	Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Résultat admis.
Définition de la convergence absolue.	
Toute série absolument convergente est convergente.	Admis. Dans les exercices, on se limitera à des séries absolument convergentes.

III - **Probabilités et statistiques**

1 - Couples de variables aléatoires discrètes finies

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires. Lois marginales, lois conditionnelles.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X=x] \cap [Y=y])$.
Indépendance de deux variables aléatoires.	X et Y sont indépendantes si, pour tous intervalles I et J, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants. On remarquera que si l'une des variables aléatoires X, Y est constante, X et Y sont indépendantes.
Espérance d'une somme de deux variables aléatoires, linéarité de l'espérance.	Admis.
Espérance d'un produit de deux variables aléatoires.	$\displaystyle E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X=x]\cap[Y=y])$. Admis.
Cas de deux variables aléatoires X et Y indépendantes.	$E(XY) = E(X)E(Y)$. Admis. La réciproque est fausse.
Covariance. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X,a) = 0$. $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.
Formule de Huygens.	$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, la réciproque étant fausse.
Variance d'une somme de deux variables aléatoires.	

Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X,Y)$. Si $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$, $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}\,(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X,Y)\rvert \leqslant 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X,Y) = \pm 1$.

2 - Suites de variables aléatoires discrètes finies

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires.	Les variables aléatoires $X_1, ...X_n$ sont mutuellement indépendantes si, pour tout choix de n intervalles $I_1, ..., I_n$, les événements $[X_1 \in I_1]$,..., $[X_n \in I_n]$ sont mutuellement indépendants.
Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires.	Les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes.
Espérance de la somme de n variables aléatoires.	
Variance d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.	

3 - Variables aléatoires discrètes infinies

Notion d'espace probabilisé avec Ω non fini. Système complet.	Système complet d'événements de type $A_1, ..., A_n, ...$, où les A_i sont des événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Extension des définitions et des propriétés des variables aléatoires discrètes au cas où l'image est un ensemble infini dénombrable : loi de probabilité, fonction de répartition, espérance, variance, écart-type.	On se limitera aux variables aléatoires dont l'image est indexée par $\mathbf{N}$. Aucune difficulté théorique ne sera soulevée au moment de l'extension des propriétés.
Loi géométrique. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Loi Poisson. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

4 - Statistiques bivariées

On s'appuiera sur les représentations graphiques pour montrer l'intérêt et les limites des indicateurs.

Analyse de deux caractères qualitatifs : fréquences marginales, fréquences conditionnelles.

Analyse de deux caractères quantitatifs : covariance empirique, corrélation linéaire empirique, ajustement affine par la méthode des moindres carrés, droites de régression ; changements de variables permettant de se ramener à un ajustement affine.

Enseignement de mathématiques du quatrième semestre

I - Analyse

1 - Intégration

Les intégrales généralisées sont introduites essentiellement pour leurs applications au calcul des probabilités. Aucune difficulté ne sera soulevée.

Le calcul des intégrales généralisées est effectué par des recherches de primitives sur des intervalles du type $[a, b]$, l'application de la relation de Chasles, et des passages à la limite en $-\infty$ et/ou $+\infty$.

Extension de la notion d'intégrale aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$.

Intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Convergence et définition.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie, et, dans ce cas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $]-\infty, b]$.

Extension aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ (ou $]-\infty, a]$).

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$; l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.
De même, si f est continue et positive sur $]-\infty, a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^{a} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty, a]$.

Extension de la notion d'intégrale généralisée aux fonctions continues par morceaux ayant un nombre fini de discontinuités sur $\mathbf{R}$.

2 - Fonctions réelles de deux variables réelles

L'objectif est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes d'extremums des fonctions de deux variables et d'acquérir une maîtrise de quelques outils théoriques essentiels (notamment la condition nécessaire d'extremum à partir des dérivées partielles).
On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus du programme d'économie et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D, permises par Scilab.

a) Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$

Exemples de fonctions de deux variables.	Exemple des fonctions polynomiales.
Continuité d'une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur cette notion.
Opérations sur les fonctions continues.	Les applications $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues est continue. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la composée d'une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ est continue.

b) Calcul différentiel

Les fonctions sont désormais supposées définies sur $\mathbf{R}^2$ et suffisamment régulières pour pouvoir appliquer le théorème de Schwarz. Toute justification de l'utilisation du théorème de Schwarz est hors programme.

Dérivées partielles d'ordre 1.	Les étudiants doivent connaître les notations usuelles : f'_x, f'_y.
Dérivées partielles d'ordre 2.	Les étudiants doivent connaître les notations usuelles : f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}. f''_{xy} désigne la dérivée, par rapport à x, de f'_y.
Théorème de Schwarz.	Résultat admis.

c) Extrema d'une fonction de deux variables

Les fonctions sont supposées définies sur $\mathbf{R}^2$.

Maximum, minimum local d'une fonction de deux variables réelles. Maximum, minimum global d'une fonction de deux variables réelles sur $\mathbf{R}^2$.	
Une fonction continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ est bornée sur tout pavé $[a,b]\times[c,d]$ et y atteint ses bornes.	Résultat admis.
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.	Si une fonction dérivable admet un extremum local en un point, ses dérivées partielles d'ordre 1 sont nulles en ce point.

Point critique.	
Notations de Monge.	Au point critique (x_0, y_0), $r = f''_{x,x}(x_0, y_0)$, $s = f''_{x,y}(x_0, y_0)$, $t = f''_{y,y}(x_0, y_0)$.
Condition suffisante d'extremum.	Au point critique (x_0, y_0) : si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local en (x_0, y_0) ; si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local en (x_0, y_0) ; si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0).
Application à la recherche d'extrema locaux.	

II - **Probabilités et statistiques**

1 - Variables aléatoires à densité continue par morceaux

Ce paragraphe généralise l'étude de la loi uniforme effectuée en première année.

Le passage du cas discret au cas continu n'est pas explicité. On se limitera à des calculs de probabilités du type $P([X \in I])$, où I est un intervalle de **R**.

Densité de probabilité.	Une fonction f définie sur **R** est une densité de probabilité si elle est positive, continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Variable aléatoire à densité.	Une variable aléatoire X admet une densité si sa fonction de répartition F peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une densité de probabilité. Sur des exemples, détermination d'une densité de $aX + b$ ou de X^2.
Espérance, variance et écart-type.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée au moment de l'extension des propriétés.
Loi uniforme. Rappels.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$.
Loi exponentielle. Densité et fonction de répartition. Espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Loi normale centrée réduite. Densité.
loi normale (ou de Laplace-Gauss) de paramètres m et σ^2, où $\sigma > 0$.
Espérance et variance.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On attend des étudiants qu'ils sachent utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
Chacune des lois usuelles sera illustrée par un exemple concret d'une situation qu'elle modélise.

2 - Convergence et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

On justifiera ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.

Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance,

$$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P([\mid X - E(X) \mid \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.
Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P([|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon]) = 0$

c) Approximations

Exemples d'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson ou par la loi normale.

Toutes indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.
Les notions générales de convergence en loi et de convergence en probabilité sont hors programme, ainsi que le théorème limite central.

3 - Estimation

L'objectif est d'initier les étudiants au vocabulaire et à la démarche de la statistique inférentielle sur quelques cas simples en présentant le problème de l'estimation de la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on étudie une variable aléatoire réelle X qui lui est liée. En général, la loi de probabilité de X n'est pas complètement déterminée. Le plus souvent, on suppose que cette loi appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ réel qui appartient à un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$.

Le problème de l'estimation consiste à estimer la vraie valeur du paramètre à partir d'un échantillon de données $x_1, ..., x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Les $X_1, ..., X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X.

a) Estimation ponctuelle.

n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de θ est une fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ne dépendant pas de θ.
Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire.	Exemple d'estimateurs : estimateur du paramètre p d'une loi de Bernoulli, estimateur du paramètre λ d'une loi de Poisson.
Biais d'un estimateur.	Si, pour tout $\theta \in \Theta$, T_n admet une espérance, on appelle biais de T_n le réel $b_\theta(T_n) = E_\theta(T_n) - \theta$.
Estimateur sans biais.	L'estimateur T_n de θ est sans biais si, pour tout $\theta \in \Theta$, $E_\theta(T_n) = \theta$.
Risque quadratique d'un estimateur.	Si, pour tout $\theta \in \Theta$, T_n^2 admet une espérance, on appelle risque quadratique de T_n le réel $r_\theta(T_n) = E_\theta\left((T_n - \theta)^2\right)$.
Décomposition biais-variance du risque quadratique d'un estimateur.	$r_\theta(T_n) = b_\theta(T_n)^2 + V_\theta(T_n)$.

b) Intervalle de confiance

La démarche consiste non plus à donner une estimation ponctuelle de θ à partir d'un estimateur T_n mais à trouver un intervalle aléatoire, inclus dans Θ, appelé intervalle de confiance et qui a une forte probabilité de contenir θ.
Ce paragraphe a uniquement pour but de préciser le vocabulaire employé. Les situations seront étudiées sous forme d'exercices, aucune autre connaissance que ce vocabulaire n'est exigée sur les intervalles de confiance.

Intervalle de confiance.	Soient U_n et V_n deux variables aléatoires, ne dépendant pas de θ, fonctions d'un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$. On dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-\alpha$ si, pour tout $\theta \in \Theta$, $P_\theta([U_n \leqslant \theta \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha$. Comme pour T_n, les réalisations de U_n et V_n doivent être calculables à partir du seul échantillon $(x_1, x_2, ..., x_n)$ observé.
Intervalle de confiance pour le paramètre d'une loi de Bernoulli.	On obtiendra ces intervalles de confiance par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$.

TRAVAUX PRATIQUES DE MATHEMATIQUES AVEC SCILAB

En première année, les élèves ont acquis les bases de manipulation du logiciel Scilab. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants d'utiliser Scilab de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Le programme d'informatique s'articule autour de six thèmes : statistique descriptive univariée, statistique descriptive bivariée, chaînes de Markov, fonctions de plusieurs variables, simulation de lois, estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Pour certains thèmes, il sera nécessaire d'introduire de nouvelles notions mathématiques ; celles-ci seront introduites en préambule lors des séances d'informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants, et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation.

Toute la richesse du logiciel Scilab ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes introduites en première année et celles figurant dans la sous-partie "Commandes exigibles" sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du logiciel, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. On pourra donc introduire de nouvelles fonctions Scilab, sous réserve d'en rappeler systématiquement la syntaxe et de bien préciser le type de résultat obtenu.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

I - **Liste des nouvelles commandes exigibles**

Toutes les commandes du programme de première année sont exigibles. Seules les nouvelles commandes exigibles des étudiants sont indiquées dans ce paragraphe.

La connaissance des commandes suivantes ainsi que de leurs arguments est exigible des candidats :

`sum`, `cumsum`, `mean`, `median`, `st_deviation`, `corr`, `max`, `cdfnor`,
`zeros`, `ones`, `eyes`, `spec`.

Les commandes suivantes devront avoir été manipulées par les candidats mais la connaissance détaillée de leurs arguments n'est pas exigible des candidats :

`plot2d`, `fplot2d`, `plot3d`, `fplot3d`, `param3d`.

II - **Liste des thèmes**

1 - Statistique descriptive univariée (durée approximative : 2 heures)

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.

Série statistique associée à un échantillon.
Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâton, histogrammes.
Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.
Indicateurs de dispersion : étendue, variance, écart-type empiriques.

On pourra également utiliser les commandes : `dsearch`, `tabul`, `pie`.

2 - Statistique descriptive bivariée (durée : 3 heures)

Série statistique à deux variables, nuage de points associé.
Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage.
Covariance, coefficient de corrélation, droite de régression.

Commandes : `zeros`, `eyes`, `ones`, `plot2d`, commandes matricielles. On tracera le nuage de points et les droites de régression et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire.

3 - Chaînes de Markov (durée : 4 heures)

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes étudiées en première année ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire étudiées au semestre 3.

Matrice de transition.
Étude sur des exemples simples.
Comportement limite.

On pourra étudier l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus. Simulation et mise en évidence d'états stables avec la commande `grand(n, 'markov', M, x0)`

4 - Fonctions de plusieurs variables (durée : 5 heures)

Etude d'extremums locaux et globaux.
Exemples d'extremums sous contraintes.

Commande `fplot3d`. Programmation de fonctions variées permettant de mettre en évidence les notions d'extremums locaux ou globaux, avec ou sans contrainte.
On pourra prendre des exemples issus de l'économie ou de la finance : minimisation du risque ; maximisation du profit.

5 - Simulation de lois, application au calcul d'espérances (durée : 10 heures)

Simulation de lois uniformes.

On pourra simuler la loi uniforme sur $[a, b]$ soit directement avec la commande `grand`, soit par transformation affine à partir d'une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Simulation de la loi exponentielle de paramètre λ.	On s'intéressera à la loi de $Y = -\dfrac{\ln(1-X)}{\lambda}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Comparaison entre différentes méthodes : utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction `floor`, utilisation du générateur `grand`.
Simulation informatique de la loi de $X = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ où les Y_k sont des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme à densité sur $[0,1]$.	On s'intéressera en particulier au cas $n = 12$. On remarquera que la variable aléatoire centrée réduite associée à X est une approximation de la loi normale centrée réduite et on sensibilisera les étudiants au théorème limite central, en testant cette simulation avec d'autres lois.
Moyenne empirique et variance empirique.	
Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation grâce à la commande `grand`. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Méthode de Monte-Carlo : principe, et applications.	Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est parfois difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation. On pense typiquement à des probabilités d'événements, des espérances de variables aléatoires, ou des calculs d'intégrales. On pourra également recourir à cette méthode pour vérifier numériquement la justesse d'un calcul explicite d'une quantité comme une espérance ou une variance. La loi des grands nombres garantit la qualité de l'approximation.